



# Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants

Vincent Bregeault

## ► To cite this version:

Vincent Bregeault. Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2010. Français. NNT: . tel-00560746

**HAL Id: tel-00560746**

**<https://theses.hal.science/tel-00560746>**

Submitted on 29 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2010

N° B.U. :

THÈSE DE DOCTORAT

Diplôme délivré par l'école Centrale de Nantes

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE APPLIQUÉE

Présentée et soutenue publiquement par :

**Vincent BREGEAULT**

3 Décembre 2010

à l'Ecole Centrale de Nantes

TITRE

**QUELQUES CONTRIBUTIONS À LA THÉORIE DE  
LA COMMANDE PAR MODES GLISSANTS**

JURY

Président	A. GLUMINEAU	<i>Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, laboratoire IRCCyN</i>
Rapporteurs	T. FLOQUET	<i>Chargé de recherches CNRS HDR au LAGIS</i>
	M. M'SAAD	<i>Professeur à l'ENSICAEN, laboratoire GREYC</i>
Examineurs	X. BRUN	<i>Maître de conférences HDR à l'INSA de Lyon, laboratoire AMPERE</i>
	A. LEVANT	<i>Professeur associé à l'Université de Tel-Aviv (Israël), School of Mathematics</i>
	F. PLESTAN	<i>Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, laboratoire IRCCyN</i>

**Directeur de thèse : Franck PLESTAN**

Laboratoire : IRCCyN

Composante de rattachement du directeur de thèse : École Centrale de Nantes

**N° ED : 503-108**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Organisation du mémoire . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Introduction à la commande par modes glissants</b>	<b>15</b>
2.1	Commande par modes glissants : concepts de base . . . . .	15
2.1.1	Synthèse de la surface de glissement . . . . .	17
2.1.2	Synthèse de la loi de commande . . . . .	18
2.2	Formalisation mathématique et commande équivalente . . . . .	20
2.2.1	Commande nominale . . . . .	21
2.2.2	Commande équivalente . . . . .	22
2.3	Type d'incertitudes et perturbations rejetées . . . . .	23
2.4	Le phénomène du <i>chattering</i> . . . . .	24
2.4.1	Remplacement de la fonction sign par une fonction continue . . . . .	25
2.4.2	Utilisation d'observateur . . . . .	26
2.5	Conclusion . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Modes glissants d'ordre supérieur</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Homogénéité . . . . .	30
3.2.1	Exemples de fonctions homogènes . . . . .	31
3.2.2	Propriétés des systèmes homogènes . . . . .	32
3.3	Dérivateur de précision asymptotique optimale . . . . .	33
3.3.1	Précision asymptotique optimale . . . . .	34
3.3.2	Dérivateur de Levant . . . . .	34
3.4	Ordre de glissement et précision . . . . .	37
3.4.1	Ordre de glissement . . . . .	37
3.4.2	Précision dans le cas de modes glissants réels . . . . .	38
3.5	Quelques exemples de commandes par modes glissants d'ordre 2 . . . . .	41
3.5.1	L'algorithme du <i>twisting</i> [Lev93] . . . . .	41
3.5.2	Commande sous-optimale par modes glissants d'ordre deux [BAG99] . . . . .	42
3.5.3	L'algorithme du <i>super twisting</i> [Lev93] . . . . .	43
3.6	Quelques exemple de commandes par modes glissants d'ordre arbitraire . . . . .	45
3.6.1	Terminal sliding mode [YM94] . . . . .	45
3.6.2	Algorithmes de Levant [Lev01, LP08] . . . . .	46
3.6.3	Commande optimale quadratique [LSPB06, Lag04] . . . . .	46
3.6.4	Commande basée sur des trajectoires précalculées [PGL08] . . . . .	49
3.7	Une preuve originale de stabilité du <i>super twisting</i> . . . . .	49
3.7.1	Condition de stabilité . . . . .	50

3.7.2	Simplifications . . . . .	51
3.7.3	Subdivision et pire cas . . . . .	51
3.7.4	Premier quadrant . . . . .	52
3.7.5	Second quadrant . . . . .	54
3.7.6	Conclusion de la preuve . . . . .	55
3.8	Conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Banc d'essais électropneumatique</b>	<b>59</b>
4.1	Présentation du banc d'essais électropneumatique . . . . .	59
4.1.1	Partie mécanique . . . . .	59
4.1.2	Vérins . . . . .	59
4.1.3	Servodistributeurs . . . . .	61
4.1.4	Capteurs, calculateur, simulation . . . . .	62
4.2	Modèle de simulation . . . . .	64
4.2.1	Partie mécanique . . . . .	64
4.2.2	Vérin . . . . .	65
4.2.3	Servodistributeurs . . . . .	67
4.2.4	Modèle de simulation . . . . .	67
4.2.5	Modèle simplifié . . . . .	68
4.2.6	Valeurs des paramètres . . . . .	69
4.3	Commande mono et multivariable . . . . .	69
4.3.1	Découplage linéarisant multivariable . . . . .	70
4.3.2	Linéarisation monovariable . . . . .	72
4.4	Conclusion . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Commande par modes glissants d'ordre 1 à amplitude adaptative</b>	<b>73</b>
5.1	Premier algorithme . . . . .	73
5.1.1	Preuve de convergence . . . . .	75
5.1.2	Réglage de $\delta(t)$ . . . . .	76
5.2	Maximum de l'erreur et de l'amplitude de la commande en régime établi . . . . .	77
5.2.1	Modèle . . . . .	77
5.2.2	Résolution dans le cas général . . . . .	77
5.2.3	Maximum de $\sigma$ et $K$ dans le pire cas . . . . .	78
5.3	Ajout d'un terme linéaire . . . . .	79
5.4	Résultats expérimentaux sur le banc d'essais électropneumatique . . . . .	80
5.5	Conclusion . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Introduction à la commande à temps minimal</b>	<b>85</b>
6.1	Problème général de la commande optimale . . . . .	86
6.1.1	Position du problème . . . . .	86
6.1.2	2 Solutions : Principe du minimum de Pontryagin et équation d'Hamilton Jacobi Bellman . . . . .	87
6.2	Commande à temps minimal d'un système linéaire temporellement variant . . . . .	89
6.2.1	Commande normée . . . . .	89
6.2.2	Solution temporelle de l'équation différentielle . . . . .	90
6.2.3	Structure de la commande . . . . .	91
6.3	Propriétés spécifiques aux systèmes linéaires temporellement invariant . . . . .	92
6.3.1	Condition de normalité . . . . .	92

6.3.2	Théorème de Feldbaum . . . . .	92
6.4	Commande en boucle fermée . . . . .	94
6.4.1	Hypersurface de commutation . . . . .	94
6.4.2	Théorème de Feldbaum et surface de commutation . . . . .	95
6.4.3	Exemples de surfaces de commutation à temps minimal . . . . .	95
6.4.4	Espace atteignable . . . . .	97
6.5	Théorème de Feldbaum sur un système partiel et calcul numérique de la surface de commutation . . . . .	98
6.5.1	Système considéré et définitions . . . . .	98
6.5.2	Théorème de bijection . . . . .	99
6.5.3	Forme implicite de la surface de commutation . . . . .	101
6.5.4	Algorithme de calcul pour le cas général . . . . .	101
6.5.5	Algorithme de calcul pour une chaîne d'intégrateurs purs . . . . .	103
6.6	Conclusion . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Commande par modes glissants d'ordre supérieur basée sur la com- mande à temps optimal</b>	<b>107</b>
7.1	Modèle considéré . . . . .	108
7.2	Commande . . . . .	109
7.2.1	Modes glissants d'ordre supérieur . . . . .	112
7.2.2	Exemple : triple intégrateur . . . . .	113
7.3	Systèmes oscillants et commande à structure variable . . . . .	115
7.4	Réduction du <i>chattering</i> . . . . .	117
7.4.1	Exemple : Double intégrateur . . . . .	119
7.5	Conclusion . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>123</b>
8.1	Perspectives . . . . .	124
<b>A</b>	<b>Un observateur par modes glissants</b>	<b>125</b>
A.1	Rappels sur l'observabilité . . . . .	126
A.2	Observation d'un système incertain . . . . .	127
A.2.1	Multiplicité des états possibles . . . . .	128
A.2.2	Forme canonique d'observabilité et état de référence . . . . .	128
A.3	Structure de l'observateur . . . . .	130
A.3.1	Dérivateur multiple . . . . .	131
A.3.2	Terme de correction $w$ . . . . .	131
A.4	Convergence dans le cas d'un mode glissant idéal . . . . .	132
A.5	Mode glissant réel et erreur résiduelle . . . . .	133
A.6	Exemple académique . . . . .	134
A.7	Conclusion . . . . .	135



Ce que tu fais ne sert à rien,  
mais il est très important que tu le fasses

Mahatma Gandhi





# Remerciements

J'aimerais remercier monsieur Mohamed M'Saad qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être rapporteur de ce travail, et monsieur Thierry Floquet, également rapporteur, pour ses très nombreuses remarques et critiques, toutes pertinentes et constructives.

Je remercie également monsieur Alain Glumineau d'avoir accepté de présider le jury.

Je suis très honoré que monsieur Arie Levant ait accepté d'examiner ce travail rédigé dans une langue qui n'est pas la sienne, et je tiens à le remercier pour les discussions très enrichissantes que nous avons eues.

Je suis également très reconnaissant à monsieur Xavier Brun d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir, par ses questions, permis de l'améliorer.

Je tiens à remercier monsieur Alexis Girin pour avoir préparé la plate forme d'essais électropneumatique de main de maître, ayant développé une interface claire et facile à prendre en main, et me l'ayant présentée de manière très pédagogique.

J'aimerais également exprimer ma reconnaissance à monsieur Claude Moog pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail au cours de la thèse et pour les corrections qu'il a apportées au mémoire.

Je remercie messieurs Leonid Fridman et Jaime Moreno ainsi que leurs équipe : Alejandro, Marco, Francisco, et tous les autres pour leur accueil chaleureux et la qualité des échanges scientifiquesque nous avons pu avoir.

Que tous mes professeurs qui m'ont patiemment inculqué connaissances et méthodes au fil des ans, dont certains avec un rare talent, trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Sans eux, je n'aurait jamais pu mener ce travail à bien.

Je n'oublie pas d'associer à ces remerciements mes camarades thésards ou jeunes docteurs qui ont fait de ces trois années à l'IRCCyN un moment agréable, convivial et scientifiquement enrichissant.



# Chapitre 1

## Introduction

La plupart des méthodes de synthèse d'observateurs et de lois de commande se basent sur un modèle mathématique du système à commander. Certaines de ces techniques exigent une très bonne connaissance du modèle, sous peine de dégradation importante des performances, voire de perte de stabilité. Or, les systèmes réels ont très souvent un comportement différent des modèles mathématiques, à cause de variations de paramètres, de phénomènes physiques négligés, de perturbations extérieures, . . . Et même lorsque l'on a un très bon modèle à disposition, il arrive fréquemment qu'il soit trop complexe, et doive être simplifié pour pouvoir synthétiser un observateur ou une commande. Un remède consiste à calculer la loi de commande pour une *famille* de modèles à laquelle le système réel est censé appartenir. Cet ensemble est généralement constitué d'un système nominal et de variations limitées de paramètres de ce modèle, appelées *incertitudes*. Une telle famille est appelée *modèle incertain*. Si la loi de commande est synthétisée de manière à répondre aux exigences du cahier des charges pour tous les modèles de cette famille, elle est dite *robuste*.

Un type de lois de commande robuste simple à calculer et à mettre en oeuvre, même pour des systèmes non linéaires, est la *commande par modes glissants*. Elle est apparue en Union soviétique pendant les années 60 à partir des travaux sur les commandes à *structure variable*, c.à.d des commandes commutant entre plusieurs lois de commande différentes (en général linéaires) en fonction de certains critères. De ce point de vue, une commande par modes glissants se distingue par sa simplicité : le critère de commutation est une *surface de glissement* divisant l'espace d'état en deux (pour une commande monovariante, ou pour chaque composante d'une commande multivariante), et les lois de commande dans chaque demi espace sont des constantes. Cette loi de commande est définie de manière à forcer le système à atteindre un voisinage de la surface de glissement et à y rester, pour tous les modèles de la classe d'incertitudes considérée. Cette commande a deux principaux avantages. Premièrement, le comportement dynamique du système une fois atteint le voisinage de la surface de glissement est essentiellement conditionné par cette dernière. On dit que le système est en *régime glissant*. Deuxièmement, ce comportement est non seulement *robuste*, mais même *insensible* à la classe d'incertitudes pour laquelle la commande a été réglée.

Cependant, la discontinuité de la commande engendre des oscillations de fréquence élevée une fois atteint le régime glissant, phénomène connu sous le nom de *chattering*. Ce phénomène est le plus grand défaut des commandes par modes glissants, car il peut causer une perte de précision, et surtout une usure prématurée des actionneurs ou du système, en plus de générer un bruit sur des systèmes mécaniques. On peut y remédier

en changeant la loi de commande maintenant le système sur la surface de glissement pour supprimer les discontinuités, ou tout au moins réduire leur amplitude. Mais ces méthodes ont un prix : elles réduisent la robustesse.

De plus, une question reste en suspens : quel comportement faut-il imposer au système pendant la phase de glissement, autrement dit, comment choisir la surface de glissement ?

La théorie de la commande par modes glissants *d'ordre supérieur* a émergé dans les années 80, entre autres pour apporter une nouvelle réponse à ces deux problèmes.

Ce travail propose entre autres de nouvelles réponses à ces questions. En résumé, il présente :

- Une preuve de convergence de l'algorithme du super twisting intermédiaire entre la preuve originelle numérique et les preuves basées sur des fonctions de Lyapunov ne prouvant la stabilité que pour des coefficients élevés
- Une présentation succincte de la plate forme d'essais électropneumatique de l'IRC-CyN détaillant le modèle et le prébouclage découplant et linéarisant, pour un test rapide d'observateurs ou de lois de commandes robustes, mono ou multivariables
- Une nouvelle solution pour réduire le *chattering* en rendant adaptative l'amplitude de la commande discontinue
- Une loi de commande par modes glissants d'ordre supérieur basée sur la théorie de la commande à temps minimal Ses principaux avantages sont sa vitesse de convergence et sa facilité de réglage.

## 1.1 Organisation du mémoire

Le chapitre 2 introduit les idées fondamentales des commandes par modes glissants. Il présente les deux composants de base d'une telle commande : la surface de glissement et la loi de commande forçant le système à l'atteindre en temps fini et à y rester. Par la même occasion, les méthodes de synthèse classiques sont abordées, ainsi que les méthodes mathématiques de résolution des équations différentielles discontinues. De la notion communément appelée *commande équivalente* sont distinguées deux sous notions : la *commande nominale*, calculable à l'avance, et la *commande équivalente*, qui ne peut être constatée qu'*a posteriori*. Le type de perturbations et d'incertitudes rejetées, les perturbations *co-incidentes*, sont également précisées. Enfin, les causes du phénomène de *chattering* sont explicitées, et les méthodes classiques pour le réduire, présentées.

Alors que le chapitre 2 ne présentait que des surfaces de glissement linéaires engendrant des modes glissants d'ordre 1, le troisième aborde la notion de commande par modes glissants *d'ordre supérieur*. Ce terme regroupe deux idées distinctes : une commande dont non seulement la variable de glissement, mais également ses dérivées successives, s'annulent en temps fini en l'*absence* de *chattering* génère un mode glissant *idéal*. Un mode glissant *réel*, quant à lui, désigne une précision asymptotique en *présence* de *chattering*. L'*homogénéité*, propriété sur laquelle est basée la théorie actuelle des commandes par modes glissants d'ordre supérieur, est introduite, ainsi qu'un dérivateur homogène convergeant en temps fini, condition *sine qua non* pour développer des commandes par retour de sortie convergeant en temps fini. Quelques exemples de lois de commande par modes glissants d'ordre 2 permettent de mesurer les différences par rapport aux modes glissants classiques, ainsi que la grande diversité d'approches imaginées au cours des deux dernières décennies. Enfin, une première contribution de ce travail est présentée. Il s'agit d'une preuve de convergence de l'algorithme du *super twisting* intermédiaire entre la preuve numérique originelle, per-

mettant d'avoir les coefficients les plus petits permettant d'assurer la convergence, et les preuves basées sur des fonctions de Lyapunov, plus facilement réutilisables pour prouver la convergence de lois de commande similaires.

Le quatrième chapitre présente la plate forme d'essais électropneumatique de l'IRC-CyN. Après une présentation générale des technologies employées, il propose un modèle complet de simulation, ainsi qu'un modèle simplifié de synthèse d'observateurs ou de lois de commande. Ce banc d'essais adossé à un simulateur permet de tester des observateurs ou des lois de commande mono comme multivariable. Un vérin pneumatique générant une force extérieure d'amplitude et de dynamique comparables au vérin commandé permet de tester la robustesse des lois de commandes implantées.

Le cinquième chapitre propose un moyen original de réduire le *chattering*, en rendant adaptative l'amplitude de la commande discontinue. L'idée est d'augmenter l'amplitude de la commande rapidement quand le système est trop loin de la surface de glissement, de la diminuer lentement quand le système est dans un voisinage de la surface, la taille de ce voisinage variant dans le temps en fonction d'un majorant de l'amplitude du *chattering*. Une étude du pire cas permet de donner des bornes peu conservatives de l'erreur en régime glissant, ainsi que de proposer une amélioration au premier algorithme présenté pour réduire cette erreur.

Le sixième chapitre ne traite pas de systèmes incertains ou de modes glissants, mais de commande à temps minimal appliquée à des systèmes parfaitement connus. Il présente le problème consistant à trouver la commande en boucle ouverte permettant au système d'atteindre un objectif en temps minimum et donne les deux méthodes principales pour le résoudre. Des solutions plus précises dans des cas particuliers sont ensuite présentées, notamment le cas des systèmes linéaires. Le théorème de Feldbaum, en particulier, permet de définir une surface de commutation à temps minimal étant aussi une surface de glissement, dans le cas idéal. Deux algorithmes numériques permettant de calculer les surfaces de commutation à temps minimal sont également présentés. L'un s'applique à tous les systèmes linéaires temporellement invariants (LTI) à pôles réels, l'autre tire parti de l'homogénéité de la commande d'une chaîne d'intégrateurs purs.

S'appuyant sur les 3<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> chapitres, le dernier présente une commande par modes glissants d'ordre supérieur basée sur la commande à temps minimal d'un système linéaire temporellement invariant à pôles réels, donc satisfaisant le théorème de Feldbaum. Cette commande hérite de la robustesse de la commande par modes glissants ainsi que de la vitesse de convergence de la commande à temps minimal. Il démontre un autre résultat : le même principe de commande appliqué à un système LTI quelconque donne dans le cas général une commande à structure variable, pas forcément à modes glissants. Enfin, après avoir montré pourquoi la plupart des méthodes classiques de réduction du *chattering* ne peuvent pas être appliquées, il présente une manière de rendre cette commande continue pour réduire le *chattering*.

Une annexe présente une stratégie d'observation par modes glissants reposant sur une transformation du problème d'observation en un problème de commande. Après quelques rappels des notions fondamentales sur l'observabilité, elle pose le problème de l'observation d'un système incertain et donne un sens physique à l'estimation de l'état qu'un observateur fournit si le système est mal connu. L'observateur lui même est constitué d'une commande par modes glissants d'ordre 1 avec trajectoires précalculées corrigeant le modèle du système. Cette commande utilise en guise d'estimation de l'état une estimation des dérivées successives de la sortie provenant d'un dérivateur homogène. L'utilisation de trajectoires précalculées permet de fixer le temps de convergence *a priori*. Cet observateur

reste d'un intérêt limité, car il a peu ou prou les mêmes performances qu'un dérivateur homogène seul, tout en étant plus complexe à régler et exigeant beaucoup plus de calculs en ligne.

Ces travaux ont fait l'objet de plusieurs publications :

- 3 publications en revue : [PSBP10, PSBPre, BPre]
- 3 publications en congrès international : [BP09a, BPF09, BPSP10]
- 1 publication en congrès national [BP09b]

# Chapitre 2

## Introduction à la commande par modes glissants

Ce chapitre est consacré à une présentation générale et succincte de la commande par modes glissants et de ses performances associées. Dans un souci de clarté, les systèmes considérés ici seront non linéaires, continus, mono-entrée mono-sortie (SISO) et affines en la commande. Tous les résultats exposés ci-après sont néanmoins généralisables à des systèmes multivariables (MIMO). De plus, ce chapitre se restreint à la commande par modes glissants d'ordre 1, telle qu'originellement introduite par Utkin. Le but est de permettre à un lecteur néophyte de comprendre les concepts de base de la commande par modes glissants.

Une première partie présente les concepts de base de la commande par modes glissants : la *surface de glissement* et la loi de commande discontinue traditionnellement utilisée pour forcer le système à rester sur cette surface. La deuxième partie est consacrée à une introduction à la théorie sous-jacente, et dégage les notions de *commande équivalente* et de *commande nominale*, alors que la troisième étudie les conditions pour qu'une perturbation soit efficacement rejetée. La dernière partie présente un des problèmes majeurs de la commande par modes glissants : le *chattering*, et les méthodes classiques permettant d'en réduire les effets.

### 2.1 Commande par modes glissants : concepts de base

Le principe de la commande par modes glissants est de contraindre l'état du système à atteindre en temps fini une *hypersurface* (dans l'espace d'état) donnée pour ensuite y rester. Cette hypersurface étant une relation entre les variables d'état du système, elle définit une équation différentielle, et donc détermine *totalement* la dynamique du système, pourvu qu'il reste sur cette hypersurface. L'évolution d'un système soumis à une loi de commande qui le fait rester sur une hypersurface donnée ne dépend donc plus du tout du système lui-même<sup>1</sup> ou des perturbations auxquelles il peut être soumis, mais uniquement des propriétés de cette hypersurface. Le système bouclé n'est donc pas seulement *robuste* vis-à-vis des incertitudes (propres au système) et perturbations (extérieures au système), mais totalement *insensible* à ces incertitudes et perturbations, moyennant qu'elles puissent effectivement être rejetées par la commande.

La synthèse d'une loi de commande par modes glissants consiste donc à déterminer :

---

<sup>1</sup>En l'absence de *chattering*, en tous cas.



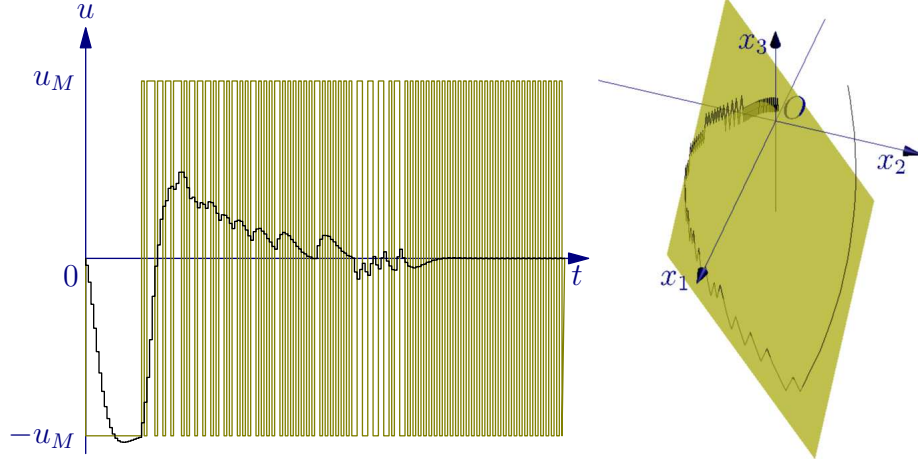


FIG. 2.1 – À gauche : Commande (brun), commande équivalente (noir). À droite : trajectoire dans l'espace d'état (noir) et surface de glissement (brun)

1. une hypersurface en fonction des objectifs de commande et des propriétés statiques et dynamiques désirées pour le système bouclé. La dynamique exigée par l'hypersurface doit être compatible avec l'amplitude de commande "utile" disponible et la dynamique du système en boucle ouverte. Dans le cas contraire, le système ne pourra pas rester sur l'hypersurface, et la propriété d'insensibilité aux perturbations sera perdue.
2. une loi de commande discontinue de manière à contraindre les trajectoires d'état du système à atteindre cette hypersurface en temps fini puis à y rester en dépit des incertitudes et des perturbations.

Considérons le système non linéaire incertain affine en la commande sous forme canonique de Brunovsky, exprimé sous forme d'inclusion différentielle

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &\in \psi(\mathbf{x}, t) + [-C, C] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  représente l'état du système avec  $\mathcal{X}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U}$ , compact de  $\mathbb{R}$ , est l'entrée de commande qui est une fonction éventuellement discontinue dépendante de l'état et du temps.  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , la dynamique nominale du système, est une fonction définie sur  $\mathcal{X}$ .  $[-C, C]$  est un terme additif inconnu, mais borné par  $C > 0$  modélisant notamment

- la différence entre les valeurs théoriques et réelles de paramètres mal connus du modèle,
- les phénomènes non modélisés ou négligés, à partir du moment où ils ne font pas varier le degré relatif du système (ici égal à l'ordre du système, vu que l'on ne s'intéresse pas à la dynamique des zéros)
- les perturbations extérieures.

$[\Gamma_m, \Gamma_M]$ , avec  $0 < \Gamma_m \leq \Gamma_M < \infty$ , est un terme modélisant l'incertitude sur le gain du système vis à vis de la commande. L'incertitude sur sa connaissance provient en pratique

essentiellement de paramètres mal connus ou de phénomènes négligés, bien que ces derniers aient souvent une autre conséquence (le *chattering*).

### 2.1.1 Synthèse de la surface de glissement

Supposons que l'objectif de commande est d'assurer une poursuite de trajectoire d'un signal de référence  $y_R(t)$  par la sortie  $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ , donc de faire tendre l'erreur  $y - y_R$  vers 0. La synthèse de la surface de glissement repose sur la définition de la *variable de glissement* :

Soit  $\sigma(x, t) : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction suffisamment différentiable et considérée comme une sortie fictive du système (2.1) telle que son annulation permette de satisfaire l'objectif de commande. La fonction  $\sigma(x, t)$  est appelée *variable de glissement* ou de *commutation*. L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \sigma(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (2.2)$$

représente alors une sous-variété de  $\mathcal{X}$  de dimension  $(n-1)$  appelée *surface de glissement*<sup>2</sup> ou *contrainte de commutation*. La définition classique du phénomène d'évolution en régime glissant est donnée par

**Définition 2.1.** [Utk92] On dit qu'il existe un *régime glissant* idéal sur  $\mathcal{S}$  s'il existe un temps fini  $t_s$  tel que la solution de (2.1) satisfait  $\sigma(\mathbf{x}, t) = 0$  pour tout  $t \geq t_s$ .

Quand les trajectoires du système (2.1) évoluent sur la surface de glissement  $\mathcal{S}$ , sa dynamique est dite immergée dans l'état d'un système autonome de dimension inférieure de 1 à sa propre dimension. Ce système autonome est appelé *système réduit* et sa dynamique est entièrement déterminée par le choix de la surface de glissement. La surface la plus simple est un hyperplan passant par l'origine de l'espace d'état, autrement dit, une surface linéaire en chacune des variables d'état. Le système réduit est donc dans ce cas un système linéaire. S'il est stable, sa convergence vers l'objectif final, l'origine du plan de phase, est nécessairement exponentielle (sauf si le système réduit est d'ordre 0). Pour obtenir d'autres propriétés, il faut choisir une structure de la surface de glissement différente, plus complexe. Cela est l'objet du prochain chapitre.

Une condition nécessaire pour l'établissement d'un régime glissant est que la variable de glissement ait un degré relatif égal à 1 par rapport à la commande  $u$  [Utk92] (le degré relatif d'un système est le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée de manière explicite [Isi95]). Considérons la variable de glissement linéaire suivante<sup>3</sup>

$$\sigma(x, t) = e^{(n-1)} + \dots + c_2 \ddot{e} + c_1 \dot{e} + c_0 e \quad (2.3)$$

où  $e = y - y_R(t)$  et les coefficients  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n-2$ ) sont choisis tel que le polynôme

$$\lambda^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \lambda^i$$

soit un polynôme d'Hurwitz, *c.à.d.* que le système réduit soit stable, puisque l'équation différentielle associée est

$$e^{(n-1)} + \dots + c_2 \ddot{e} + c_1 \dot{e} + c_0 e = 0$$

<sup>2</sup>Bien qu'il s'agisse en fait d'une *hypersurface*, le terme consacré est *surface de glissement*.

<sup>3</sup>Tout au long de ce mémoire,  $y^{(k)}$  (resp. une autre fonction) représente la dérivée  $k$ -ième de  $y$  (resp. d'une autre fonction) par rapport au temps.

Ainsi, lorsque la variable de glissement  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  est forcée à zéro, l'erreur de poursuite  $e$  converge asymptotiquement vers zéro, avec une dynamique imposée par le choix des coefficients  $c_i$ . Cette dynamique peut être réglée par n'importe quelle méthode de placement de pôles appropriée.

De plus,  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  satisfait la condition sur le degré relatif puisque la commande  $u$  apparaît dans l'expression de sa première dérivée par rapport au temps

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) \in \psi(\mathbf{x}, t) + [-C, C] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u - y_R^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i+1)} \quad (2.4)$$

Une fois la surface de glissement (*c.à.d* la dynamique du système réduit) choisie, la seconde étape consiste à choisir une commande stabilisant en zéro le système (2.4) en temps fini, malgré les incertitudes et perturbations. Ainsi, le problème de poursuite de trajectoire d'ordre  $n$  pour un système non linéaire SISO est ramené au problème de la stabilisation du système du premier ordre (2.4) en zéro.

### 2.1.2 Synthèse de la loi de commande

L'objectif de la loi de commande est de contraindre les trajectoires d'état du système (2.1) à atteindre et ensuite à rester sur la surface de glissement malgré la présence d'incertitudes sur le système. En d'autres termes, la loi de commande doit rendre la surface de glissement *localement attractive* (*c.à.d* au voisinage de la surface de glissement, toutes les trajectoires du système doivent être dirigées vers elle). Ainsi, la loi de commande doit être calculée en vérifiant une condition assurant la stabilité de  $\sigma(\mathbf{x}, t) = 0$ . Une telle condition est appelée *condition d'attractivité*.

La méthode directe de Lyapunov permet de se prononcer quant à la stabilité d'un état d'équilibre sans avoir recours à la résolution de l'équation d'état du système. En supposant que l'état d'équilibre est 0<sup>4</sup>, le signe d'une fonction  $V(x)$ , ( $V(0) = 0, V(\infty) = \infty$ ), appelée *fonction de Lyapunov*, et celui de sa dérivée temporelle  $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt}$  donnent une information sur la stabilité du système.  $V(x)$  joue le rôle d'une fonction "énergie" fictive pour le système considéré. Si  $V(x) > 0 \forall x \neq 0$  et  $\dot{V}(x) < 0$ , le système est asymptotiquement stable.

Une classe de fonctions de Lyapunov classique pour la détermination de la condition d'attractivité est celle des fonctions quadratiques du type

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.5)$$

Cette fonction est définie positive de manière évidente. Une condition nécessaire et suffisante pour que la variable de glissement  $\sigma(x, t)$  tende vers zéro est que la dérivée de  $V$  soit définie négative

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} < 0. \quad (2.6)$$

Cette inégalité est appelée *condition d'attractivité* qui n'est pas suffisante pour assurer une convergence en temps fini vers la surface. Pour assurer une convergence de  $\sigma(x, t)$  vers 0 *en temps fini*, une condition plus forte doit être respectée. Dans le cas des modes glissants classiques, on utilise généralement la condition d'attractivité non-linéaire dite *condition de  $\eta$ -attractivité* [Utk92]

$$\sigma\dot{\sigma} \leq -\eta|\sigma|, \quad \eta > 0 \quad (2.7)$$

---

<sup>4</sup>Cela est toujours possible moyennant un changement de variable le cas échéant.

Cela revient, pour  $\sigma \neq 0$ , à

$$\dot{\sigma} \leq -\eta \operatorname{sign}(\sigma), \quad \eta > 0 \quad (2.8)$$

On voit tout de suite pourquoi ce critère garantit une convergence en temps fini. Par intégration, si  $\sigma(0) > 0$ ,  $\sigma(t) \leq \sigma(0) - \eta t$ , et si  $\sigma(0) < 0$ ,  $\sigma(t) \geq \sigma(0) + \eta t$ . Donc  $\sigma(t)$  atteint 0 en un temps inférieur à  $\frac{|\sigma(0)|}{\eta}$  dans tous les cas.

Ce critère est tout le temps satisfait si la commande est du type

$$u = -u_M \operatorname{sign}(\sigma) \quad (2.9)$$

avec l'amplitude  $u_M$  choisie de manière à être suffisamment grande pour

- compenser l'écart de dynamique entre le système réel et le système de référence (donné par la surface de glissement),
- compenser les perturbations co-incidentes.

D'après l'Eq. (2.4),  $u_M$  doit être réglé tel que

$$u_M \geq \max_{\mathbf{x}, t} \left( \underbrace{\Gamma_m^{-1}}_{\text{incertitude sur le gain}} \left( \underbrace{\left| \psi(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i+1)} - y_R^{(n)}(t) \right|}_{\text{écart de dynamique}} + \underbrace{C + \eta}_{\text{perturbation co-incidente}} \right) \right) \quad (2.10)$$

Cela donne une condition fondamentale pour garantir l'existence d'un mode glissant. En effet, l'idée maîtresse de ce type de commande est d'"écraser" les perturbations. Il faut donc que l'amplitude physiquement réalisable de la commande (une fois pris en compte le gain  $[\Gamma_m, \Gamma_M]$ ) soit suffisamment grand pour pouvoir exactement compenser toutes les perturbations. À partir de maintenant, nous n'envisagerons plus que ce cas de figure.

**Hypothèse 2.1.** La commande a une amplitude suffisante pour compenser l'écart de dynamique et les perturbations. Autrement dit, il existe toujours  $u_M(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{U}(\mathbf{x}, t)$  vérifiant la condition de l'Eq. (2.10).

En pratique, on ne considère généralement que le cas où  $u_M$  est constant et assez grand pour l'ensemble du domaine physique dans lequel évolue le système.

Pour résumer, le comportement du système peut être décrit par deux phases :

**Phase de convergence.** Cette phase correspond à l'intervalle de temps  $t \in [0, t_s]$  pendant lequel les trajectoires d'état du système ne sont pas dans la surface de glissement  $\mathcal{S}$ . Durant cette phase, le système reste sensible aux variations de paramètres. Sa durée peut être réduite en augmentant  $\eta$ , *c.à.d* en augmentant l'amplitude de la commande.

**Phase de glissement.** Cette phase correspond à l'intervalle de temps  $t \in [t_s, \infty[$  durant laquelle les trajectoires d'état sont confinées dans la surface de glissement  $\mathcal{S}$ . Durant cette phase, le comportement du système ne dépend plus du système d'origine ni des perturbations, mais est entièrement déterminé par le choix de la surface de glissement<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Cela n'est vrai que si l'amplitude de la commande est suffisante et/ou que la dynamique exigée par la surface de glissement n'est pas trop différente de celle du système d'origine. Si cela n'est pas le cas, le système quitte la surface de glissement.

## 2.2 Formalisation mathématique et commande équivalente

Pendant le régime glissant, la commande a une fréquence de commutation en théorie *infinie* ; autrement dit, la commande est discontinue à chaque instant. Ce cas de figure n'est absolument pas abordé par la théorie classique des équations différentielles, qui n'étudie que les équations du type

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

où  $\mathbf{f}$  est Lipschitzienne par rapport à  $\mathbf{x}$ , c.à.d. ,  $\exists L > 0$ , tel que  $\forall \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_a, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_b, t)\| \leq L \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|$$

Ce n'est pas le cas si  $\mathbf{f}$  est discontinue par rapport à  $\mathbf{x}$ . Un exemple typique est un système soumis à une commande en boucle fermée discontinue du type de (2.9).

L'étude de systèmes soumis à de telles commandes est beaucoup plus complexe. La méthode théorique générale pour résoudre de telles équations différentielles discontinues est de les remplacer par des *inclusions différentielles* [Fil88]. Aux points de discontinuité, on remplace la valeur (inconnue ou mal connue) du membre de droite par un ensemble de valeurs physiquement ou techniquement possibles. Par exemple, on peut prendre pour représentation de la fonction sign

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ [-1; 1] & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Cette technique se justifie par exemple par le fait qu'un signal physique est rarement discontinu, mais présente souvent une dérivée extrêmement élevée aux points considérés comme discontinus, ce qui fait qu'il passera (très rapidement) par toutes les valeurs intermédiaires entre la valeur à l'instant précédent et celle à l'instant suivant la discontinuité. Cette méthode permet en outre de traiter les incertitudes et perturbations inconnues, mais bornées, par le même outil mathématique. Par contre, il faut souvent faire appel à d'autres arguments pour trouver la solution de l'inclusion différentielle. De plus, si le système n'est pas affine en la commande, la transformation de l'équation différentielle en inclusion différentielle n'est pas unique, donc la solution obtenue dépend du détail de la méthode utilisée [Fil88].

Une autre approche, plus concrète, donne une solution particulière. C'est la méthode de *régularisation* des équations [Utk92, UGJ99]. Il s'agit ici d'ajouter une petite imperfection pour faire en sorte que la commande soit continue, ou en tous cas, qu'elle ne commute qu'en des points isolés. Cet ensemble des instants de commutation n'a aucune influence sur l'intégrale, donc la théorie classique s'applique<sup>6</sup>. La solution de l'équation d'origine est alors la limite quand l'imperfection artificiellement ajoutée tend vers 0. L'imperfection peut être une dynamique rapide d'actionneur, un retard pur sur la commande, ... La solution obtenue dépend dans le cas général du type d'imperfection considéré et de la manière de la faire tendre vers 0. Par contre, pour un système affine en la commande, toutes ces méthodes donnent le même résultat.

---

<sup>6</sup>On peut résoudre l'équation différentielle sur chaque intervalle où  $\mathbf{f}$  est continue, puis raccorder ces intervalles par continuité.

La méthode de régularisation la plus classique pour les modes glissants est la *commande équivalente* [UGJ99]. Quand le système est sur la surface de glissement  $\mathcal{S}$ ,  $\sigma(\mathbf{x}, t) = 0 \forall t$ , donc  $\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0$ . D'après l'Eq. (2.4), cette dernière condition donne

$$u = \frac{-\psi(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i+1)} + y_R^{(n)}(t) - [-C, C]}{[\Gamma_m, \Gamma_M]} \quad (2.12)$$

Cette valeur particulière de  $u$  est appelée *commande équivalente*, car le système a exactement la même évolution si on lui applique cette commande fictive à la place de la commande réelle discontinue (2.9).

Ce concept a 2 applications bien distinctes, exposées dans les 2 paragraphes suivants.

### 2.2.1 Commande nominale

En ne supposant aucune incertitude ni perturbation, *c.à.d.*  $[-C, C] = 0$  et  $[\Gamma_m, \Gamma_M] = \gamma(\mathbf{x}, t)$  connu, on peut calculer la valeur théorique de la commande équivalente, notée  $u_{nom}$  dans ce mémoire<sup>7</sup>. On pourrait donc, en l'absence de perturbations et incertitudes, commander le système par cette commande nominale au lieu de la commande discontinue, ce qui aurait l'avantage de supprimer les discontinuités, donc le *chattering*. Mais la commande ne pourrait plus rejeter les perturbations.

Outre son intérêt théorique, cette notion a aussi une application pratique pour réduire le *chattering*. En effet, considérons la commande

$$u = u_{nom} - u_M \text{sign}(\sigma) \quad (2.13)$$

avec  $u_{nom}$  calculée en fonction du système nominal. La commande nominale prend en charge l'écart de dynamique entre le système réduit (désiré) et le modèle du système réel. Le terme discontinu  $-u_M \text{sign}(\sigma)$  n'a donc plus qu'à rejeter les perturbations et incertitudes non prises en comptes dans le modèle. Son amplitude peut donc généralement être réduite par rapport à une commande standard.

Plus précisément, l'amplitude  $u_M$  de la commande discontinue doit être dimensionnée de manière à rejeter les incertitudes et perturbations, autrement dit,

$$u_M \geq \max_{\mathbf{x}, t} \left( \Gamma_m^{-1} \left( \underbrace{(\mu - 1)|u_{nom}|}_{\text{incertitudes sur } \gamma} + \underbrace{\mu(C + \eta)}_{\text{incertitudes sur les perturbations additives}} \right) \right)$$

avec  $\mu = \max \left( \frac{\gamma(\mathbf{x}, t)}{\Gamma_m}, \frac{\Gamma_M}{\gamma(\mathbf{x}, t)} \right)$ .

*Remarque 2.1.* On choisit souvent  $\gamma$  comme la moyenne géométrique entre les deux valeurs extrêmes possibles  $\Gamma_m(\mathbf{x}, t)$  et  $\Gamma_M(\mathbf{x}, t)$ , pour minimiser  $u_M$ .

Cette commande nominale correspond en fait à un prébouclage linéarisant dont les pôles doivent être choisis identiques à ceux du système réduit (défini par la surface de glissement). Comme le système réduit est d'ordre inférieur de 1 au système réel, il faut compléter les pôles placés par le prébouclage linéarisant par un intégrateur pur, correspondant à l'inverse de l'opération de dérivation de l'équation (2.4). La commande nominale n'est donc pas stable à elle seule, mais la commande discontinue stabilise l'ensemble, en plus de rejeter les incertitudes et perturbations.

<sup>7</sup>Elle est généralement appelée commande équivalente, et donc notée  $u_{eq}$ , notamment dans [Utk92, UGJ99].

*Remarque 2.2.* Cette amélioration de la commande par modes glissants basique est rendue possible par le fait que la commande nominale est *Lipschitz par rapport à l'espace d'état*.

$$\|u_{nom}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}) - u_{nom}(\mathbf{x})\| \leq C\|\boldsymbol{\epsilon}\|$$

Cela signifie qu'une petite erreur sur l'estimation de l'état n'engendre qu'une petite erreur sur la valeur de la commande nominale, facile à compenser par la commande discontinue.

### 2.2.2 Commande équivalente

On peut aussi vouloir prendre en compte les incertitudes et perturbations dans le calcul de la commande équivalente. Vu qu'on ne les connaît pas à l'avance, il faut alors renoncer à précalculer cette commande. Mais dans la réalité, le système ainsi que les incertitudes et perturbations ont des dynamiques finies, donc la commande équivalente a elle aussi une bande passante finie. De plus, la commande nominale est continue, et même de bande passante relativement faible par rapport à la fréquence de commutation de la commande discontinue, car elle provient d'une commande linéaire ayant des pôles imposant une dynamique lente par rapport à la fréquence de commutation. On peut donc filtrer la commande discontinue par un filtre passe bas dont la fréquence de coupure est supérieure à la bande passante du système et des perturbations, mais inférieure à la fréquence d'échantillonnage. Cela est toujours possible en théorie car la fréquence d'échantillonnage est infinie. Même en pratique, la commande par modes glissants en temps continu n'étant efficace que si la bande passante de la commande (si la réalisation est analogique) ou la fréquence d'échantillonnage (dans le cas d'une réalisation numérique) sont clairement supérieures à la dynamique du système et des perturbations, le filtrage reste possible.

Cela donne un sens physique à la commande équivalente : c'est la valeur moyenne de la commande réelle, une fois le régime glissant établi. La commande équivalente peut donc être obtenue par filtrage, mais seulement *a posteriori*. Cette notion a donc 3 applications principales.

- Elle est à la base des observateurs par modes glissants. Dans ce cas, elle est souvent appelée *injection de sortie équivalente*.
- La condition de l'Eq. (2.10) peut s'interpréter comme "l'amplitude de la commande par modes glissants doit être suffisante pour pouvoir générer (par filtrage) la commande équivalente qui forcera le système à rester sur la surface de glissement".
- Au lieu de commander le système par la commande par modes glissants brute, on peut la filtrer et commander le système par la commande équivalente. C'est un moyen parmi d'autres de réduire le *chattering* (voir §2.4). Cette technique ajoute un retard dû au filtrage, qui peut être préjudiciable, mais la réduction du *chattering* peut parfois être plus utile.

*Remarque 2.3.* Ces applications de la commande équivalente ne sont rendues possibles que par une propriété de cette dernière : elle est *continue en fonction du temps*, et de plus Lipschitz ou de bande passante limitée (ou toute autre propriété permettant de la filtrer par un filtre passe bas approprié).

*Remarque 2.4.* La commande par modes glissants ressemble beaucoup à une Modulation par Largeur d'Impulsions (MLI). Il y a néanmoins certaines différences.

- La MLI est une boucle ouverte : on spécifie le rapport cyclique, et on obtient un signal de rapport cyclique donné. Si on veut une commande en boucle fermée, il faut rajouter une loi de commande. *A contrario*, la commande par modes glissants est

par nature une commande en boucle fermée : on ne spécifie pas le rapport cyclique ; il sera tel que le système reste sur la surface de glissement. On ne peut d'ailleurs pas le connaître à l'avance, car il dépend entre autres des perturbations.

- À fréquence de commutation maximum donnée, un signal issu d'une MLI a une bien meilleure précision qu'une commande par modes glissants. Sur une période de MLI, le rapport cyclique peut varier continûment. En pratique, une précision de 8 bits ( $1/256^\circ$ ) ou de 10 bits ( $1/1024^\circ$ ) est classique. Par contre, cela correspond à deux commutations, donc deux périodes d'échantillonnage pour une commande par modes glissants, donc la valeur moyenne de cette dernière peut être soit au maximum, soit à la moitié de sa valeur, soit au minimum. Pour obtenir un quantum sur l'amplitude du signal au  $1/100^\circ$  par exemple, il faut 100 périodes d'échantillonnage pour une commande par modes glissants, soit 50 périodes de MLI.

## 2.3 Type d'incertitudes et perturbations rejetées

Dans tout ce qui précède, un seul type de perturbation a été considéré : une perturbation qui agit sur le système exactement au même niveau que la commande. Pour un système monovisible sous forme canonique de Brunovsky, elle agit uniquement sur la dynamique de  $x_n$ , à l'instar de la commande. On l'appelle perturbation *co-incidente*, (*matched* en anglais, ou perturbation qui respecte la *matching condition*). Si l'on parvient à appliquer exactement la commande opposée à la perturbation, on supprime toute influence de cette dernière sur l'évolution du système en régime glissant. D'ailleurs, la différence entre les commandes *nominales* et *équivalentes* présentées dans la section précédente est précisément cette portion de la commande qui contrecarre l'effet des perturbations. La commande équivalente la prend en compte, pas la commande nominale.

Par contre, aucune commande ne peut contrecarrer totalement et instantanément une perturbation qui ne se ramène pas à une perturbation co-incidente, comme [Dra69] l'a montré pour les systèmes linéaires. La seule possibilité pour supprimer l'effet d'une telle perturbation est d'amener l'état du système à un point où il va converger quand même vers l'objectif, éventuellement en contrecarrant la perturbation<sup>8</sup>. La rejection de ce type de perturbation par une commande par modes glissants ne dépend donc pas de la loi de commande forçant le système à rester sur la surface de glissement, mais du choix de la surface de glissement elle-même. Quelques travaux s'intéressent au choix de la surface de glissement pour réduire l'impact de telles perturbations [CF06].

Dans un système réel, les incertitudes sont souvent réparties dans tout le système, donc non co-incidentes. Si l'état réel est *mesuré* (pas observé), des incertitudes non co-incidentes, donc impossibles à rejeter exactement, sont en théorie inévitables<sup>9</sup>.

Il existe cependant un moyen théorique de transformer des incertitudes non co-incidentes en incertitudes co-incidentes, à condition qu'elles soient suffisamment dérivables. Considérons un système sous la forme canonique de Brunovsky dont l'état est estimé par un observateur (ou dérivateur multiple) et soumis à une perturbation ou incertitude non co-incidente, sur la  $i^{\text{e}}$  variable d'état. Dans ce cas, l'observateur ne va pas pouvoir distinguer la perturbation de l'état, et va attribuer la cause de l'évolution de la sortie à une valeur

<sup>8</sup>Mais ici, c'est l'état du système qui compense la perturbation, pas la commande. On ne peut donc pas imposer un objectif sur tout l'état, car la valeur de certaines variables d'état est déjà fixée par la contrainte de compensation de la perturbation.

<sup>9</sup>En pratique, si ces incertitudes sont négligeables devant une incertitude ou perturbation co-incidente, les performances ne s'en ressentiront pas.



de l'état différente de la valeur physique. Il va donc modifier directement l'estimation de l'état en fonction de la valeur de l'incertitude.

Si la perturbation est dérivable  $n - i - 1$  fois (ou  $n - i - 2$  fois, et que la dernière dérivée est Lipschitz), on est ramené au cas d'une perturbation co-incidente, la nouvelle perturbation étant la dérivée  $(n - i - 1)^e$  de la perturbation originale. Le maximum de la valeur absolue de la nouvelle perturbation peut être grand, donc exiger en théorie une amplitude de commande élevée.

Si la perturbation n'est pas suffisamment dérivable, la dérivée (généralisée)  $(n - i - 1)^e$  contiendrait des impulsions, ce qui est impossible à contrecarrer avec une commande d'amplitude finie.

Si l'état du système sous forme canonique de Brunovsky est mesuré, et non observé, l'imputation de l'effet de la perturbation à une valeur différente de l'état n'est plus possible. La commande ne pourra donc pas assurer la convergence du système à l'origine de l'espace d'état en contrecarrant la perturbation.

On voit donc l'intérêt de travailler sous la forme canonique de Brunovsky, en utilisant un observateur (ou dérivateur) : toute incertitude ou perturbation suffisamment dérivable, et dont le maximum de l'amplitude de la dérivée co-incidente avec la commande est suffisamment faible, peut se ramener à une perturbation co-incidente bornée, et donc être (en théorie) totalement compensée par une commande bien choisie.

## 2.4 Le phénomène du *chattering*

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Évidemment, pour une utilisation pratique, seule une commutation à une fréquence finie est possible, ce qui cause un retard entre la mesure de la sortie et le calcul de la commande, qui peut être amplifié si le système présente naturellement des retards ou des dynamiques négligées. Cela conduit le système à quitter la surface de glissement sans que la commande ne puisse réagir, puis, une fois le signe de la commande inversé, à revenir sur cette surface et passer de l'autre côté, et ainsi de suite.

Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner des oscillations haute fréquence de la trajectoire du système autour de la surface de glissement, un phénomène appelé *broutement* ou *chattering* en anglais. Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont [YVÖ99] :

- les retards purs en série avec le système en boucle ouverte (retards inhérents au système, échantillonnage, ...),
- les dynamiques non modélisées des capteurs et observateurs, qui retardent le moment où le régulateur prend conscience qu'il faut inverser la commande,
- les dynamiques non modélisées des actionneurs et autres dynamiques rapides du système, qui retardent le moment où la commande est suffisamment forte pour rapprocher le système de la surface de glissement.

Tous ces phénomènes ont globalement l'effet de retarder l'application effective de la commande permettant de ramener le système sur la surface de glissement à partir du moment où il l'a quittée.

On parle aussi de *chattering* pour désigner l'oscillation haute fréquence de la commande (et non plus de la variable de glissement). Une autre cause de *chattering*, notamment sur la commande, est le bruit de mesure. En effet, une erreur de mesure quand l'état est très proche de la surface de glissement peut entraîner une erreur de signe de la

commande, car cette dernière croit à tort que le système se trouve de l'autre côté de la surface. Ce phénomène est amplifié par la nécessité d'avoir des observateurs ou dérivateurs rapides, donc filtrant peu la mesure.

Les phénomènes de *chattering* peuvent être si pénalisants que l'utilisation d'une loi de commande par modes glissants peut, dans certaines applications, être à proscrire, vu que son utilisation peut dégrader les performances, voire conduire à l'instabilité à cause du *chattering* sur la sortie. Le *chattering* de la commande, quant à lui, peut entraîner une usure prématurée des actionneurs ou de certaines parties du système à cause de trop fortes sollicitations. En excitant les modes propres des dynamiques non modélisées ou des fréquences de résonance du système correspondant aux retards de commutation, cette commande peut provoquer sur les systèmes mécaniques un bruit haute fréquence<sup>10</sup> et des oscillations préjudiciables à leur structure. Sur des systèmes autres que mécaniques, les oscillations engendrées peuvent poser d'autres problèmes (réduction de précision, créations d'ondes électromagnétiques néfastes, ou autres ondes amplifiées par le système, ...).

### 2.4.1 Remplacement de la fonction sign par une fonction continue

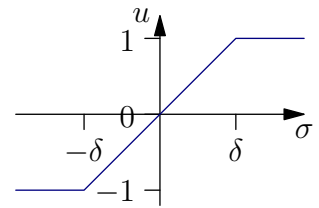
De nombreuses solutions ont été proposées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. Il existe des méthodes comme celle de la couche limite (*boundary layer*) qui consiste à remplacer la fonction "sign" de la loi de commande par une approximation continue à gain élevé dans un proche voisinage de  $\mathcal{S}$  [BZ86, Utk92], et saturée en dehors de ce voisinage. Le régime glissant qui en résulte n'est plus confiné dans  $\mathcal{S}$ , mais dans un proche voisinage de celui-ci. Dans ce cas, le système est dit en régime *pseudo-glissant*. Ces méthodes réduisent la robustesse de la commande. Elles sont paramétrées par une constante positive  $\delta$  réglée pour avoir un bon compromis entre réduction du *chattering* et conservation de la robustesse. Dans les méthodes présentées ici, plus  $\delta$  est petit, plus l'approximation tend vers la fonction sign, et donc meilleure est la robustesse, au détriment de la réduction du *chattering*.

Les 2 fonctions les plus utilisées sont :

**La fonction saturation.** Cela consiste à remplacer la fonction  $\text{sign}(\sigma)$  par la droite de pente  $1/\delta$  à l'intérieur d'une bande de largeur  $2\delta$  située de part et d'autre de la surface de glissement, la discontinuité étant conservée à l'extérieur de cette bande. Son expression est donnée par :

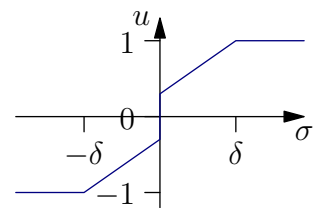
$$\text{sat}(\sigma, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| > \delta \\ \frac{\sigma}{\delta} & \text{si } |\sigma| \leq \delta \end{cases} \quad (2.14)$$

et représentée avec  $\delta = 1$  sur la figure ci contre.



**La fonction sign + saturation.** On peut combiner la fonction saturation précédente avec la fonction sign.

$$\text{sat}(\sigma, \delta) = \begin{cases} (a + b) \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| > \delta \\ a \frac{\sigma}{\delta} + b \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| \leq \delta \end{cases} \quad (2.15)$$



<sup>10</sup>Phénomène à l'origine du nom *chattering*.

avec  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $a+b$  ne dépassant pas l'amplitude maximale de la commande. Elle est représentée avec  $\delta = 1$ ,  $a+b = 1$  et  $b = 0.3$  sur la figure ci contre. Cela permet de conserver toute la robustesse des modes glissants pour des perturbations d'amplitude inférieure à  $b$  tout en diminuant le *chattering* par rapport à une commande d'amplitude  $a+b$ . Si l'amplitude de la perturbation est supérieure à  $b$ , la robustesse alors est dégradée comme dans le cas précédent. Cette solution est appropriée si l'on s'attend à des perturbations généralement faibles, mais pouvant être ponctuellement très fortes.

Il existe d'autres approximations moins utilisées, car plus coûteuses en temps de calcul :

#### La loi d'interpolation de puissance

$$v(\sigma, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| > \delta \\ (\delta/|\sigma|)^{q-1} & \text{si } 0 < |\sigma| \leq \delta \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

avec  $q \in [0, 1[$

#### La fonction pseudo-signe

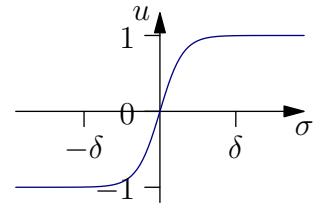
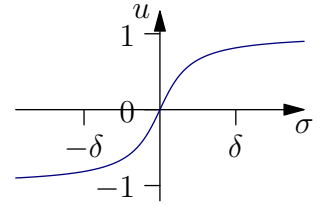
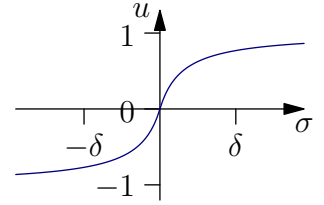
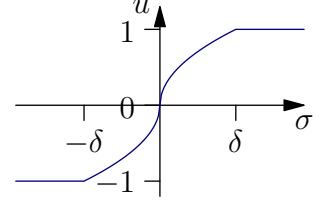
$$v(\sigma, \delta) = \frac{\sigma}{|\sigma| + \delta} \quad (2.17)$$

#### La fonction arctangente

$$v(\sigma, \delta) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (2.18)$$

#### La fonction tangente hyperbolique

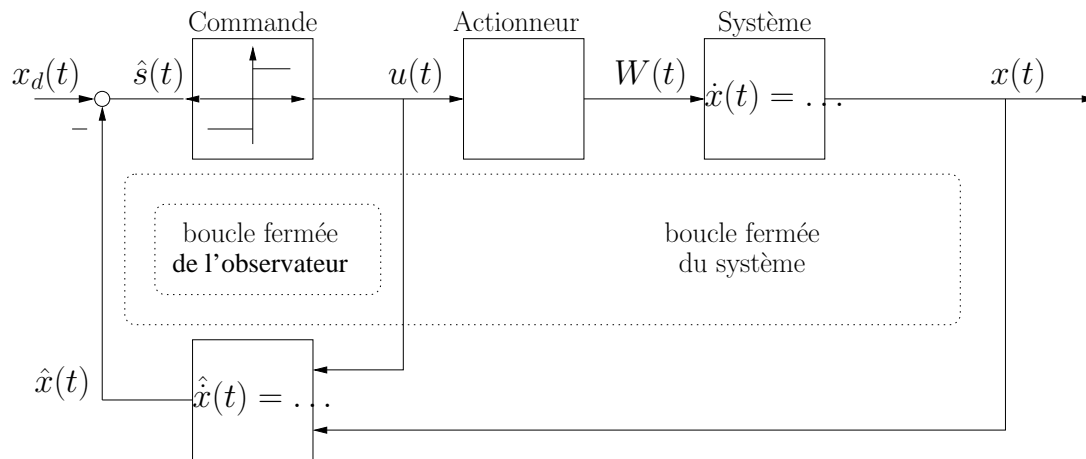
$$v(\sigma, \delta) = \tanh\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (2.19)$$



### 2.4.2 Utilisation d'observateur

Il existe également une méthode pour réduire le *chattering* basée sur l'utilisation d'observateurs. L'idée de base [BBKU85] consiste à générer un régime glissant dans une boucle contenant l'observateur du système au lieu de le générer dans une boucle contenant le système (Figure 2.2). Vu que l'observateur est indépendant des dynamiques non modélisées, un mode glissant presque idéal prend place dans la boucle fermée de l'observateur, uniquement troublé par la fréquence d'échantillonnage finie (ou par des dynamiques non modélisées ou des retards internes au système s'ils n'ont pas été modélisés). La commande fait donc tendre l'état estimé vers un voisinage proche de l'origine. Mais l'état estimé ne converge vers l'état réel que selon les dynamiques de l'observateur, qui peuvent ne converger qu'asymptotiquement, et ne prendre en compte les perturbations non modélisées que lentement. Cette commande en quelque sorte "fait l'autruche", ne tenant pas compte de l'état réel.

Une autre méthode assez répandue consiste à étendre le système (augmenter son ordre

FIG. 2.2 – Schéma bloc de la réduction du *chattering* avec un observateur

et son degré relatif) en rajoutant un intégrateur devant la commande réelle  $u$ .  $u$  devient alors une variable d'état du système, la nouvelle commande discontinue étant alors  $\dot{u}$ . Commandée par une commande  $\dot{u}$  discontinue,  $u$  est un signal triangulaire, donc Lipschitz, de bande passante beaucoup plus faible qu'un signal discontinu. Cela permet de moins exciter les dynamiques rapides négligées, et d'être moins sensible aux retards. Cette technique permet de réduire efficacement le *chattering*, mais :

- la commande ne peut plus compenser les perturbations discontinues, mais seulement les perturbations Lipschitz.
- cette méthode nécessite d'estimer une dérivée supplémentaire de la sortie, ce qui peut devenir très difficile voire impossible en pratique sur des systèmes de degré relatif supérieur à 1 ou 2.

L'utilisation de la commande équivalente à la place de la commande discontinue (§2.2.2) est une idée assez proche celle ci. La principale différence est qu'ici, la commande doit prendre en compte la dynamique supplémentaire, alors que dans le cas de la commande équivalente, le filtrage est considéré comme n'engendrant pas un retard suffisant pour dégrader la stabilité ou les performances du système.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentées les idées clé de la commande par modes glissants. Une telle commande se compose de deux éléments :

- une hypersurface sur laquelle le système doit évoluer et
- une loi de commande forçant le système à atteindre cette surface de glissement.

Après la phase de convergence, le système bouclé jouit des propriétés suivantes :

- Sa dynamique est entièrement déterminée par la surface de glissement : il est en théorie possible d'imposer au système n'importe quelle dynamique physiquement réalisable uniquement par le choix de la surface de glissement.
- Il est insensible aux perturbations extérieures ou incertitudes de paramètres *coïncidentes*, c'est à dire agissant sur le système au même niveau que la commande.
- L'ordre du système bouclé peut être réduit, certaines dynamiques étant supprimées. Dans le cas d'une surface de glissement linéaire, l'ordre est réduit du nombre d'entrées du système.

Ces caractéristiques facilitent la synthèse de lois de commande. Le choix de la commande se résume à trouver une surface de glissement adaptée, sur laquelle le système en mode de glissement possède les propriétés souhaitées.

Mais cette simplicité de synthèse de lois de commande, même en présence de perturbations très fortes, a un prix. Le *chattering*, oscillation haute fréquence de la commande et de la sortie, non content de réduire la précision, peut causer l'usure prématurée du système ou d'autres problèmes prohibant l'emploi de lois de commandes par modes glissants standards. Ce phénomène est causé par la loi de commande discontinue forçant le système à demeurer sur la surface de glissement, généralement une fonction sign. Pour l'atténuer, plusieurs solutions existent :

- Remplacement de la fonction sign par des fonctions continues.
- Génération du mode glissant dans la boucle d'observation, ne contenant aucune dynamique non modélisée, au lieu de celle contenant le système réel.
- Augmentation de l'ordre du système, pour que la commande physique soit Lipschitz.

Ces méthodes, utilisées seules ou combinées, permettent de réduire drastiquement le *chattering*, mais ne sont pas sans défauts. Le remplacement de la loi de commande discontinue par une loi de commande continue réduit la robustesse, le système n'évoluant plus sur la surface mais dans un voisinage de celle-ci. L'exploitation d'observateurs pour réduire le *chattering* limite aussi la robustesse, car la prise en compte des perturbations non modélisées par l'observateur demande généralement un certain temps, pendant lequel l'état réel diverge sans que la commande ne puisse réagir efficacement. Enfin, augmenter l'ordre du système peut poser des problèmes d'observation d'une part, et de gestion des dynamiques supplémentaires par la commande d'autre part.

On peut améliorer les commandes classiques présentées dans ce chapitre de deux manières :

- Utiliser des surfaces de glissement non linéaires pour avoir des propriétés impossibles à obtenir par des dynamiques linéaires. Cela conduit notamment à des commandes par modes glissants *d'ordre supérieur*, présentées dans le prochain chapitre, ou des commandes à temps minimal robustes présentées dans les chapitres 7 et 8.
- Modifier la loi de commande forçant le système sur la surface de glissement, notamment pour réduire le *chattering* sans contrepartie trop pénalisante. C'est l'idée de l'algorithme du *super twisting* (cf chapitre 3), ou des modes glissants à amplitude adaptative présentés au chapitre 5.

# Chapitre 3

## Modes glissants d'ordre supérieur

Ce chapitre constitue une introduction à la notion de mode glissant d'ordre supérieur et aux méthodes de synthèse de lois de commande associées. Ce vocable couvre plusieurs types de lois de commande ayant des structures diverses, mais satisfaisant toutes le même critère : la convergence non seulement d'une variable de glissement à 0 en temps fini, tout comme les commandes par modes glissants classiques, mais en plus, d'un *nombre fini de dérivées de cette variable de glissement*.

Certaines lois de commandes par modes glissants d'ordre supérieur peuvent être vues comme une classe particulière de commandes par modes glissants : la surface de glissement n'est plus linéaire, mais satisfait d'autres propriétés. D'autres ont une structure radicalement différente de celle des modes glissants plus classiques, pas uniquement constituée d'une commande discontinue.

Ces lois de commande, en plus de permettre une convergence en temps fini vers un objectif de degré relatif supérieur à 1, et plus seulement de la surface de glissement, permettent d'améliorer la précision asymptotique ou de réduire le *chattering*.

Après une courte introduction permettant de situer le problème, deux notions nécessaires à la compréhension de la théorie de la commande par modes glissants d'ordre supérieur sont présentées :

- La notion d'homogénéité, outil puissant pour les preuves de stabilité, et pour la compréhension des propriétés des commandes par modes glissants d'ordre supérieur actuellement connues est présentée dans la 2<sup>e</sup> partie.
- la 3<sup>e</sup> partie propose une approche de la dérivation en temps réel différente du filtrage linéaire classique, et compatible avec l'homogénéité avec des coefficients correspondant à la plupart des commandes par modes glissants d'ordre supérieur.

La 4<sup>e</sup> partie explique les propriétés des modes glissants d'ordre supérieur, et distingue notamment les notions de modes glissants d'ordre supérieur *idéal* et *réel*. La 5<sup>e</sup> partie regroupe différents exemples de modes glissants d'ordre 2, tandis que la 6<sup>e</sup> présente des exemples d'ordre arbitraire, en illustrant certaines distinctions faites précédemment. La dernière propose une preuve de convergence originale de l'une des lois de commande d'ordre 2, le *super twisting*.

### 3.1 Introduction

Considérons le même système (2.1) que lors du chapitre précédent

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &\in \psi(\mathbf{x}, t) + [-C(\mathbf{x}, t), C(\mathbf{x}, t)] + [\Gamma_m(\mathbf{x}, t), \Gamma_M(\mathbf{x}, t)]u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Mais cette fois ci, considérons une autre variable de glissement  $\sigma(x, t)$  de degré relatif  $r$  plus nécessairement égal à 1 par rapport à la commande.

Si  $r$  est supérieur à 1, une commande du type  $u = -K \text{sign}(\sigma(x, t))$  n'est plus acceptable. En effet, d'après [Ano59, Tsy84] repris dans [LF02] qui ont fait une étude de stabilité pour les systèmes linéaires sans aucune perturbation, si  $r = 2$ , le système bouclé n'est stable que si le système en boucle ouverte est stable ou qu'il s'agit d'un double intégrateur pur<sup>1</sup>. Si  $r > 2$ , le système en boucle fermée est toujours instable, même si le système en boucle ouverte est stable.

Il faut donc trouver une autre structure de commande qui garantisse la stabilité du système en boucle fermée.

Une solution simple est de prendre en compte les  $n - 1$  premières dérivées de la variable de glissement dans le calcul de la commande, par exemple de commuter suivant l'hyperplan

$$\bar{\sigma} = \sigma^{(n-1)} + \dots + c_2\sigma^{(2)} + c_1\sigma^{(1)} + c_0\sigma$$

ce qui donne la commande  $u = -K \text{sign}(\bar{\sigma}(x, t)) = -K \text{sign}(\sigma^{(n-1)} + \dots + c_2\sigma^{(2)} + c_1\sigma^{(1)} + c_0\sigma)$ . Cette commande n'est rien d'autre qu'une commande par mode glissant classique, d'ordre 1 par rapport à la variable de commutation  $\bar{\sigma}$ . Elle est stable, mais ne permet pas d'avoir une convergence en temps fini de  $\sigma$  à 0. On a seulement la convergence à  $\bar{\sigma}$  en temps fini. Un mode glissant apparaît sur la surface  $\bar{\mathcal{S}}$  ( $\bar{\sigma} = 0$ ), mais pas sur  $\mathcal{S}$ .

Existe-t-il des structures de commande permettant l'existence d'un mode glissant pour une variable de commutation de degré relatif strictement supérieur à 1 ? La réponse est oui : il s'agit de modes glissants d'ordre supérieur.

La plupart des commandes utilisant ce concept se basent sur la notion d'homogénéité, avec un jeu de coefficients (poids) particuliers. De plus, leur intérêt par rapport aux commandes par modes glissants classiques n'apparaît véritablement que lorsque l'on prend en compte des observateurs particuliers adaptés aux signaux discontinus. C'est pourquoi les deux paragraphes suivants introduisent ces deux aspects avant la présentation de ces lois de commandes dans un troisième paragraphe.

### 3.2 Homogénéité

Une propriété facilitant la synthèse de commandes par modes glissants d'ordre supérieur est la propriété d'*homogénéité*. Cette propriété est satisfaite par la quasi totalité des commandes par modes glissants d'ordre supérieur, et elle constitue la pierre angulaire des preuves de convergence associées.

---

<sup>1</sup>Dans ce dernier cas, le système bouclé est parfaitement oscillatoire, donc pas *asymptotiquement* stable

**Définition 3.1.** [Lev05] Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ de vecteurs  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ou un champ multivalué  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  sont homogènes de degré  $q$  par la dilatation  $d_\kappa(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\kappa^{m_1}x_1, \dots, \kappa^{m_n}x_n)$ , avec  $m_i > 0$  et  $\kappa > 0$  si et seulement si, respectivement,

- $f(d_\kappa \mathbf{x}) = \kappa^q f(\mathbf{x})$
- $\mathbf{f}(d_\kappa \mathbf{x}) = \kappa^q d_\kappa \mathbf{f}(\mathbf{x})$
- $\mathbf{f}(d_\kappa \mathbf{x}) = \kappa^q d_\kappa \mathbf{f}(\mathbf{x})$

L'homogénéité d'un champ de vecteurs (multivalué ou non)<sup>2</sup> se définit de manière équivalente comme l'invariance de l'équation différentielle  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  (respectivement de l'inclusion différentielle  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) par rapport à la transformation  $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (\kappa^{-q}t, d_\kappa \mathbf{x})$ .

*Remarque 3.1.* Tout degré d'homogénéité  $q$  non nul peut se ramener à  $\text{sign}(q)$  (soit 1 soit  $-1$ ) en divisant tous les poids par  $|q|$ .

Avant d'étudier les propriétés des fonctions homogènes, quelques exemples permettent d'éclairer ce concept.

### 3.2.1 Exemples de fonctions homogènes

Il existe deux principaux exemples de systèmes homogènes ayant un sens physique.

**Un champ de vecteurs linéaire** est homogène de degré 0 avec tous les poids  $m_i = 1$ . En effet,  $\mathbf{A}(\kappa \mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \kappa^0 \kappa(\mathbf{A}\mathbf{x})$ , avec  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Un système linéaire temporellement invariant est donc une équation différentielle homogène.

**Une chaine d'intégrateurs purs**, c.à.d un système LTI

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

est homogène de degré  $-1$  avec les poids  $m_i = n + 1 - i$ . En effet,

$$\mathbf{A}(d_\kappa \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \kappa^{n-1}x_2 \\ \kappa^{n-2}x_3 \\ \vdots \\ \kappa x_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^{-1}\kappa^n x_2 \\ \kappa^{-1}\kappa^{n-1}x_3 \\ \vdots \\ \kappa^{-1}\kappa^2 x_n \\ 0 \end{bmatrix} = \kappa^{-1} d_\kappa(\mathbf{A}\mathbf{x})$$

De plus, si un champ de vecteurs  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  respectant cette homogénéité est appliquée, l'équation différentielle reste homogène. En prenant l'exemple d'une commande  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  n'agissant que sur la dernière ligne et en exploitant cette fois la définition équivalente (invariance de l'équation différentielle associée), on obtient

$$\mathbf{A}(d_\kappa \mathbf{x}) + \mathbf{u}(d_\kappa \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \kappa^{n-1}x_2 \\ \kappa^{n-2}x_3 \\ \vdots \\ \kappa x_n \\ \mathbf{u}(d_\kappa \mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^{-1}\kappa^n x_2 \\ \kappa^{-1}\kappa^{n-1}x_3 \\ \vdots \\ \kappa^{-1}\kappa^2 x_n \\ \kappa^{-1}\kappa \mathbf{u}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{d_\kappa \mathbf{x}}{\kappa dt} \quad \text{car} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

<sup>2</sup>Attention, ceci ne s'applique pas aux fonctions simples homogènes.



Il y a bien invariance de l'équation différentielle par rapport à la transformation

$$(t, \mathbf{x}) \rightarrow (\kappa t, d_\kappa \mathbf{x})$$

Cet exemple est fondamental, car à la base de la théorie des modes glissants d'ordre supérieur. En effet, si  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  est une commande de la forme  $\text{sign}(f(\mathbf{x}))$  avec  $f$  une fonction homogène ayant les même poids  $m_i = n + 1 - i$ , alors le système bouclé est homogène et possède toutes les propriétés énoncées dans le paragraphe suivant. C'est pourquoi ce jeu de poids sera appelé dans ce mémoire *poids de mode glissant d'ordre  $n$* .

### 3.2.2 Propriétés des systèmes homogènes

La propriété d'homogénéité permet de :

- lier l'espace et le temps<sup>3</sup> par la transformation  $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (\kappa^{-q}t, d_\kappa \mathbf{x})$ , ce qui permet d'obtenir certaines informations sur le temps connaissant l'état ou vice-versa,
- rendre globale une propriété homogène locale ou inversement, en appliquant la dilatation  $d_\kappa$ .

Ces deux propriétés permettent notamment d'établir le théorème suivant

**Theorème 3.1.** [Lev05] *Pour un système homogène de degré négatif, ces 3 propriétés sont équivalentes :*

$$\text{Stabilité asymptotique} \Leftrightarrow \text{Stabilité en temps fini} \Leftrightarrow \text{Contractivité.}$$

De manière informelle, une inclusion différentielle homogène est contractive si, à partir d'un état initial compris dans un domaine "homogène"  $D_1$ , l'état du système atteint un domaine  $D_2$  strictement inclus dans  $D_1$  en un temps fini. Plus précisément,

**Définition 3.2.** [Lev05] Une inclusion différentielle homogène est dite contractive si et seulement s'il existe 2 compacts  $D_1$  et  $D_2$  et un temps  $T > 0$  tels que

- $d_\kappa D_1 \in D_1$  pour  $\kappa < 1$ ,
- $D_2$  appartienne à l'intérieur de  $D_1$  et contienne l'origine,
- toutes les trajectoires partant de  $D_1$  sont comprises dans  $D_2$  au temps  $T$ .

En outre, la robustesse est un corollaire de la contractivité.

**Theorème 3.2.** [Lev05] *Si un système de degré d'homogénéité négatif est perturbé par une perturbation homogène (ou en pratique, ayant un majorant homogène)  $\epsilon = [\epsilon^{m_1} \dots \epsilon^{m_n}]^T$ , il convergera en temps fini vers un ensemble homogène de mêmes poids et contenant l'origine : un ensemble  $[x_1, \dots, x_n]^T$  tel que  $|x_i| \leq \gamma_i \epsilon^{m_i}$ , avec  $\gamma_i$  des constantes positives.*

*Remarque 3.2.* [BR01] Le degré d'homogénéité doit être négatif pour avoir une convergence en temps fini. En effet, si le système est asymptotiquement stable, un degré d'homogénéité nul conduit à une convergence exponentielle, et un degré positif, une convergence également asymptotique.

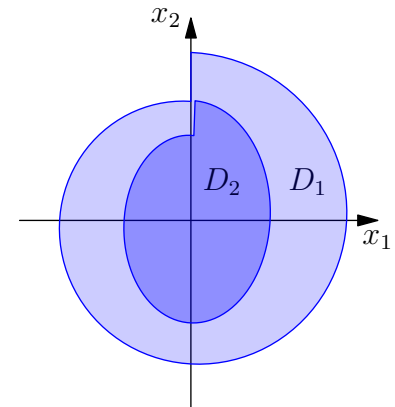


FIG. 3.1 – Exemple de domaines  $D_1$  et  $D_2$  pour l'étude de la contractivité

<sup>3</sup>on parle ici d'espace d'état, il n'est pas question de relativité restreinte !

### 3.3 Dérivateur de précision asymptotique optimale

Les caractéristiques d'une commande par retour de sortie en utilisant une approche basée sur l'état dépendent non seulement de la commande mais aussi de l'observateur. Nous avons vu au §2.3 l'importance de la forme de Brunovsky pour des systèmes incertains, et au paragraphe précédent un outil puissant pour analyser les chaînes d'intégrateurs additionnées de termes homogènes. Or, un observateur d'une chaîne d'intégrateurs purs n'est rien d'autre qu'un dérivateur. Ces deux faits expliquent que l'observateur classique dans la théorie des modes glissants d'ordres supérieurs est un dérivateur, éventuellement additionné du modèle de l'état,  $\psi(\mathbf{x}, t)$  pour le système (2.1).

Mais dériver un signal en temps réel est un problème fondamental en automatique. En effet, connaître la dérivée (ou mieux, les dérivées successives) de la sortie instantanément permettrait de prévoir son futur immédiat, grâce à une série de Taylor. Cette connaissance du futur permettrait de décider d'une commande efficace, de manière robuste car prenant en compte la réalité du système au lieu d'un modèle entaché d'incertitudes, ce qui explique encore l'importance théorique de la forme de Brunovsky pour les systèmes incertains.

Cependant, l'estimateur le plus simple de la dérivée, la différence finie,

$$\frac{dy}{dt} \simeq \frac{y(t + \delta t) - y(t)}{\delta t}$$

est rarement utilisable en pratique, car il amplifie fortement les bruits de mesure. Il faudrait trouver une méthode qui réduise les bruits de mesure, mais ce problème est mathématiquement mal posé. En effet, il s'agit de trouver  $\dot{f}(t)$  en connaissant uniquement la sortie bruitée  $y(t) = f(t) + b(t)$ . Cela est impossible sans connaissance *a priori* des caractéristiques du bruit ou de la sortie.

Pour extraire un signal proche du signal de sortie, on peut projeter le signal mesuré sur un sous-espace fonctionnel contenant l'ensemble des signaux de sortie plausibles (ou un sous-ensemble), et contenant le moins possible d'autres signaux. La projection supprime donc une partie du bruit, mais elle ne peut pas le supprimer totalement, et peut aussi altérer l'estimation de  $\dot{f}(t)$ . Les différentes approches se distinguent sur les caractéristiques du signal prises en compte pour cette projection (filtrage).

L'approche classique, user d'un filtre passe bas, repose sur le fait que la vraie sortie est basse fréquence, car provenant d'un système réel à bande passante plus faible que celle du capteur. Cette approche peut donc être interprétée comme une projection du signal mesuré sur le sous-espace des signaux basse fréquence, éliminant de ce fait les composantes hautes fréquences considérées comme du bruit. Cette méthode permet d'obtenir une estimation de la dérivée exploitable, mais avec un retard induit par le filtre, d'autant plus grand que le filtre est efficace<sup>4</sup>. Cela concorde avec la remarque du début de cette section sur la causalité : le dérivateur ne peut pas prévoir le futur trop lointain, donc l'amélioration de la qualité de la dérivée est compensée par le retard dans l'estimation de cette dérivée.

Au lieu de considérations fréquentielles, on peut se baser sur la constante de Lipschitz  $L$  de la dérivée de la sortie réelle<sup>5</sup>. Autrement dit, on considère des signaux dont  $|\dot{f}(t + \delta t) - \dot{f}(t)| \leq L \delta t$ . Tout signal dont la dérivée seconde (au sens généralisé) est supérieure

<sup>4</sup>Le retard augmente avec d'une part l'augmentation des constantes de temps du filtre, qui permet de filtrer davantage, et d'autre part son ordre, qui permet d'améliorer la selectivité du filtre, pour ne vraiment filtrer que les fréquences inatteignables par le système.

<sup>5</sup>Ceci ne veut pas dire que la sortie est doublement dérivable au sens classique. En effet, la dérivée seconde (au sens généralisé) peut très bien être discontinue, donc avoir une dérivée à gauche différente de la dérivée à droite en certains points.

à  $L$  est entaché de bruit et doit être projeté dans le sous espace des fonctions de taux de variation borné par  $L$ .

Ce critère de réduction du bruit de mesure est théoriquement mieux adapté à des commandes par modes glissants. En supposant que les perturbations sont d'amplitude relativement faible par rapport à la commande, la dérivée au sens généralisé de la variable  $x_n$  du système (2.1) a une valeur absolue à peu près constante proche de  $\Gamma(\mathbf{x}, t)u$  ; seul son signe varie de manière importante. Moyennant de choisir judicieusement la constante de Lipschitz, ce modèle du signal à dériver est donc théoriquement plus proche de la vraie sortie que le modèle fréquentiel.

### 3.3.1 Précision asymptotique optimale

Un théorème de Kolmogorov redémontré par [Lev98] donne les limites asymptotiques de la précision de l'estimation des dérivées d'ordre quelconque étant donné un bruit d'amplitude maximale  $\epsilon$  et une constante de Lipschitz de la  $(n-1)^e$  dérivée<sup>6</sup>.

**Théorème 3.3.** [Lev05] *Soit un signal  $f(t)$  à dériver  $i$  fois ( $i < n$ ) et dont la constante de Lipschitz de la  $(n-1)^e$  dérivée est bornée par  $L$ . Si ce signal est corrompu par un bruit de mesure d'amplitude inférieure à  $\epsilon$ ,*

- *Aucun dérivateur exact d'ordre  $i < n$  ne peut avoir une précision meilleure que  $L^{\frac{i}{n}} \epsilon^{\frac{n-i}{n}}$ .*
- *Il existe un dérivateur de précision asymptotique  $\mathcal{O}\left(L^{\frac{i}{n}} \epsilon^{\frac{n-i}{n}}\right)$ , pour la  $i^e$  dérivée ( $i < n$ ). Autrement dit, il existe des constantes  $\gamma_i \geq 1$  telles que  $|\hat{f}^{(i)} - f^{(i)}| \leq \gamma_i L^{\frac{i}{n}} \epsilon^{\frac{n-i}{n}}$ , où  $\hat{f}^{(i)}$  est l'estimation de la  $i^e$  dérivée de  $f(t)$ .*

Vu que  $\epsilon$  est petit et que  $L$  est typiquement assez grand, on voit que la précision se dégrade avec l'ordre de la dérivée. Par exemple, pour un dérivateur d'ordre 3, une constante de Lipschitz de  $L = 10$  et un majorant de l'erreur de mesure  $\epsilon = 0.01$  conduisent à

- Pour  $\dot{f}$ , l'erreur est de  $\sqrt[3]{10} \cdot 0.01^{\frac{2}{3}} = 2.15 \cdot 0.04 = 0.1$
- Pour  $\ddot{f}$ , l'erreur est de  $10^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{0.01} = 4.61 \cdot 0.215 = 1$

*Remarque 3.3.* L'erreur d'estimation de la dérivée est homogène avec des poids de mode glissant d'ordre  $n$  par rapport à  $\sqrt[n]{\epsilon}$ . En effet, elle est de la forme  $[\alpha_0(\sqrt[n]{\epsilon})^n \dots \alpha_{n-1}(\sqrt[n]{\epsilon})^1]^T$ , avec  $\alpha_i = \gamma_i L^{\frac{i}{n}}$ .

### 3.3.2 Dérivateur de Levant

Un dérivateur ayant la précision asymptotique optimale d'après la théorie a été proposé par Levant [Lev03]. Il permet d'estimer les dérivées d'ordre 1 à  $n-1$  en supposant que la dérivée  $(n-1)^e$  a une constante de Lipschitz  $L$  connue.

Avec des coefficients  $\lambda_i$  bien choisis, entre autres tels que  $1 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ , ce

---

<sup>6</sup>Le choix de notation consistant à considérer des signaux  $n-1$  fois dérivables au lieu de  $n$  fois s'explique par le fait qu'un tel dérivateur peut servir d'observateur pour un système d'ordre  $n$  sous forme canonique de Brunovsky, et qu'il a des propriétés compatibles avec un mode glissant d'ordre  $n$ .

dérivateur prend la forme récursive

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 - \lambda_1 L^{\frac{1}{n}} |z_1 - f(t)|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(z_1 - f(t)) \\
\dot{z}_2 &= z_3 - \lambda_2 L^{\frac{1}{n-1}} |z_2 - \dot{z}_1|^{\frac{n-2}{n-1}} \text{sign}(z_2 - \dot{z}_1) \\
&\dots \\
\dot{z}_i &= z_{i+1} - \lambda_i L^{\frac{1}{n+1-i}} |z_i - \dot{z}_{i-1}|^{\frac{n-i}{n+1-i}} \text{sign}(z_i - \dot{z}_{i-1}) \\
&\dots \\
\dot{z}_{n-1} &= z_n - \lambda_{n-1} L^{\frac{1}{2}} |z_{n-1} - \dot{z}_{n-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{n-1} - \dot{z}_{n-2}) \\
\dot{z}_n &= -\lambda_n L \text{sign}(z_n - \dot{z}_{n-1})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Différentes valeurs pour  $\lambda_i$  ont été proposées. En général, plus les valeurs de  $\lambda_i$  sont élevées, plus la convergence est rapide, mais plus le *chattering* est important, donc plus la précision est dégradée. Les deux jeux de coefficients les plus connus sont

	$\lambda_n$	$\lambda_{n-1}$	$\lambda_{n-2}$	$\lambda_{n-3}$	$\lambda_{n-4}$
[Lev03]	1.1	1.5	3	5	8
[FLD07]	1.1	1.5	2	3	5

Par exemple, un dérivateur d'ordre 3 utilisant les coefficients de [FLD07] sera

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 - 2 L^{\frac{1}{3}} |z_1 - f(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(z_1 - f(t)) \\
\dot{z}_2 &= z_3 - 1.5 L^{\frac{1}{2}} |z_2 - \dot{z}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_2 - \dot{z}_1) \\
\dot{z}_3 &= -1.1 L \text{sign}(z_3 - \dot{z}_2)
\end{aligned}$$

**Theorème 3.4.** [Lev03] *Le dérivateur (3.1) converge en temps fini, et est exact en l'absence de bruit de mesure ou de discrétisation temporelle. En présence de bruit de mesure inférieurs à  $\epsilon$  ou de retards inférieurs à  $\sqrt[n]{\epsilon}$ , sa précision asymptotique est optimale :  $\mathcal{O}\left(L^{\frac{i}{n}} \epsilon^{\frac{n-i}{n}}\right)$ .*

La forme récursive de ce dérivateur est utile pour étudier ses propriétés, ainsi que pour régler les coefficients  $\lambda_i$ . Il peut aussi être réécrit sous forme non récursive, dépendant seulement de  $z_1 - f(t)$  [Lev03]. Le détail des calculs n'est pas donné dans [Lev03]. Il est donné ici, car il peut être utile pour une implémentation alternative.

**Theorème 3.5.** *Le dérivateur sous forme récursive (3.1) est équivalent à la forme non récursive :*

$$\begin{aligned}
\forall i \in [1, n-1], \quad \dot{z}_i &= z_{i+1} - \kappa_i L^{\frac{i}{n}} |z_1 - f(t)|^{\frac{n-i}{n}} \text{sign}(z_1 - f(t)) \\
\text{pour } i = n, \quad \dot{z}_n &= -\kappa_n L \text{sign}(z_1 - f(t))
\end{aligned} \tag{3.2}$$

avec

$$\kappa_i = \lambda_i \lambda_{i-1}^{\frac{n-i}{n-(i-1)}} \lambda_{i-2}^{\frac{n-i}{n-(i-2)}} \dots \lambda_2^{\frac{n-i}{n-2}} \lambda_1^{\frac{n-i}{n-1}} \tag{3.3}$$

*Remarque 3.4.* Pour  $i = 1$ , cette expression donne

$$\dot{z}_1 = z_1 - \lambda_1 L^{\frac{1}{n}} |z_1 - f(t)|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(z_1 - f(t))$$

et pour  $i = n$ ,

$$\dot{z}_n = -\lambda_n L \text{sign}(z_n - \dot{z}_{n-1})$$

*Démonstration.* Le théorème précédent peut être prouvé récursivement. L'équation pour  $\dot{z}_1$  est vraie de manière évidente :  $\kappa_1 = \lambda_1$ . Supposons que la formule de l'Eq. (3.2) soit vraie pour  $i - 1 < n$ . Réécrivons la sous la forme

$$z_i - \dot{z}_{i-1} = \kappa_{i-1} L^{\frac{i-1}{n}} |z_1 - f(t)|^{\frac{n+1-i}{n}} \text{sign}(z_1 - f(t))$$

et remplaçons  $z_i - \dot{z}_{i-1}$  par ce résultat dans l'Eq. (3.1) :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1} - \lambda_i L^{\frac{1}{n+1-i}} \left( \kappa_{i-1} L^{\frac{i-1}{n}} |z_1 - f(t)|^{\frac{n+1-i}{n}} \right)^{\frac{n-i}{n+1-i}} \text{sign}(z_1 - f(t)) \\ &= z_{i+1} - \lambda_i \kappa_{i-1}^{\frac{n-i}{n+1-i}} L^{\frac{1}{n+1-i}} L^{\frac{(i-1)(n-i)}{n(n+1-i)}} |z_1 - f(t)|^{\frac{n-i}{n}} \text{sign}(z_1 - f(t)) \\ &= z_{i+1} - \kappa_i L^{\frac{i+1}{n}} |z_1 - f(t)|^{\frac{n-1-i}{n}} \text{sign}(z_1 - f(t)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \lambda_i \left( \lambda_{i-1} \lambda_{i-2}^{\frac{n+1-i}{n-(i-2)}} \dots \lambda_2^{\frac{n+1-i}{n-2}} \lambda_1^{\frac{n+1-i}{n-1}} \right)^{\frac{n-i}{n+1-i}} \\ &= \lambda_i \lambda_{i-1}^{\frac{n-i}{n-(i-1)}} \lambda_{i-2}^{\frac{n-i}{n-(i-2)}} \dots \lambda_2^{\frac{n-i}{n-2}} \lambda_1^{\frac{n-i}{n-1}} \end{aligned}$$

Le calcul de l'exposant de L est

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1-i} + \frac{(i-1)(n-i)}{n(n+1-i)} &= \frac{1}{n+1-i} \left( \frac{n+in-n-i^2+i}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1-i} \frac{i(n+1-i)}{n} \\ &= \frac{i}{n} \end{aligned}$$

□

On peut donner les tables des coefficients  $\kappa_i$  pour différents jeux de coefficients  $\lambda_i$  :<sup>7</sup>  
Coefficients de [Lev03] :

n	1	2	3	4	5
$\kappa_{00}$	1.5	3	5	8	12
$\kappa_{01}$	1.1	$1.5\sqrt{3} = 2.6$	$3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 8.8$	$5 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 23.8$	$8 \cdot 12^{\frac{4}{5}} = 58.4$
$\kappa_{02}$		1.1	$1.5\sqrt{3}\sqrt[3]{5} = 4.4$	$3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{4}} = 24.8$	$5 \cdot 8^{\frac{3}{4}} \cdot 12^{\frac{3}{5}} = 105.6$
$\kappa_{03}$			1.1	$1.5\sqrt{3}\sqrt[3]{5}\sqrt[4]{8} = 7.5$	$3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{4}} \cdot 12^{\frac{2}{5}} = 67.0$
$\kappa_{04}$				1.1	$1.5\sqrt{3}\sqrt[3]{5}\sqrt[4]{8}\sqrt[5]{12} = 12.3$
$\kappa_{05}$					1.1

Coefficients de [FLD07] :

n	1	2	3	4	5
$\kappa_{00}$	1.5	2	3	5	8
$\kappa_{01}$	1.1	$1.5\sqrt{2} = 2.1$	$2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4.2$	$3 \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 10.0$	$5 \cdot 8^{\frac{4}{5}} = 26.4$
$\kappa_{02}$		1.1	$1.5\sqrt{2}\sqrt[3]{3} = 3.1$	$2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{4}} = 9.3$	$3 \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{3}{5}} = 34.9$
$\kappa_{03}$			1.1	$1.5\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{5} = 4.6$	$2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{4}} \cdot 8^{\frac{2}{5}} = 21.4$
$\kappa_{04}$				1.1	$1.5\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{5}\sqrt[5]{8} = 6.9$
$\kappa_{05}$					1.1

<sup>7</sup>D'après la Rem. 3.4, le jeu de coefficients  $\lambda_i$  utilisé correspond à la 1<sup>re</sup> ligne, sauf pour  $\lambda_n$ , qui vaut toujours 1.1

## 3.4 Ordre de glissement et précision

Après avoir étudié l'observateur et armé d'un important outil d'analyse des modes glissants d'ordre supérieur, nous pouvons maintenant nous intéresser aux lois de commandes. Pour garantir la stabilité de la surface de glissement, si la variable de commutation est de degré relatif  $r$  par rapport à la commande, il faut garantir que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r - 1$  soient également nulles une fois que le système a convergé vers  $\sigma = 0$ . Si ce n'était pas le cas, la variable de glissement dévierait de 0 par intégration, puisqu'elle est de classe de continuité  $\mathcal{C}^{r-1}$ , ce qui voudrait dire que le système quitterait la surface de glissement : le régime glissant ne serait donc dans ce cas pas établi, ou pas stable.

### 3.4.1 Ordre de glissement

Un mode glissant d'ordre supérieur à 1 doit donc satisfaire à des exigences plus strictes qu'un mode glissant classique pour des raisons de stabilité. Formalisons les choses pour les étudier plus en détail.

**Définition 3.3.** [Lev93] L'ensemble de glissement d'ordre  $r \geq 1$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) par rapport à la variable de glissement  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  est donné par

$$\mathcal{S}^r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\} \quad (3.4)$$

Par abus de langage, cet ensemble est souvent appelé *surface de glissement d'ordre  $r$* .

**Définition 3.4.** [Lev93] Soit  $\mathcal{S}^r$  un ensemble de glissement d'ordre  $r$  non vide. Supposons qu'il définisse un ensemble intégral au sens de Filippov [Fil88], *c.à.d* qu'il soit composé de solutions de l'inclusion différentielle (2.1). Alors la dynamique satisfaisant (3.4) est appelée mode glissant (ou régime glissant) d'ordre  $r$  par rapport à la fonction de commutation  $\sigma$ .

**Définition 3.5.** [Lev93] Si les trajectoires du système atteignent l'ensemble de glissement  $\mathcal{S}^r$  au bout d'un temps fini et y restent à partir de ce temps<sup>8</sup>, on dit que le système évolue suivant un mode glissant idéal d'ordre  $r$ .

*Remarque 3.5.* L'ordre de glissement  $r$  est une mesure du degré de différentiabilité de la variable de glissement  $\sigma$  au voisinage de la surface de glissement :  $\sigma$  est de classe de continuité  $\mathcal{C}^{r-1}$  (au moins). Si de plus  $\sigma$  est de degré relatif  $r$  par rapport à une commande *discontinue*,  $\sigma$  n'est pas dérivable  $r$  fois, seulement  $r - 1$  fois. Mais si la commande ainsi que les dynamiques du système et les perturbations sont bornées, sa dérivée d'ordre  $r - 1$  est toutefois Lipschitz.

Cette remarque a pour conséquence entre autres le théorème suivant, qui formalise les constatations précédentes nous ayant amené à introduire la notion de mode glissant d'ordre supérieur.

**Théorème 3.6.** [Utk92] *Un régime glissant d'ordre 1 existe sur la surface  $\mathcal{S}$  si et seulement si le système est de degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement.*

On peut encore noter que les notions de mode glissant d'ordre 1 et d'ordre supérieur ne s'excluent pas mutuellement. Si la sortie réelle  $y$  d'un système est de degré relatif  $n$  par rapport à la commande, on peut décomposer le problème de commande en deux en

<sup>8</sup>Ceci n'est en toute rigueur possible qu'en l'absence de *chattering*.

posant la sortie virtuelle  $\sigma$  comme combinaison linéaire Hurwitz de la sortie et de ses  $n - r - 1$  premières dérivées. Dans ce cas, pour  $\sigma = 0$ , on a un mode glissant d'ordre 1 sur la partie "aval" du système (la sortie réelle et ses  $n - r - 1$  premières dérivées). Il suffit d'assurer que la sortie virtuelle  $\sigma$  ainsi que ses  $r - 1$  dérivées (la partie "amont" du système) convergent vers 0 par un mode glissant d'ordre  $r$  pour commander totalement le système.

Par exemple, pour un système de degré relatif 3, on peut choisir  $\sigma = x_2 + \lambda x_1$ .  $\sigma$  étant de degré relatif 2 par rapport à la commande, on peut utiliser une commande par modes glissants d'ordre 2 pour le stabiliser à 0.

La commande obtenue, même si sa convergence n'est qu'asymptotique (pas en temps fini), est une commande par modes glissants ayant les propriétés de robustesse en découplant et peut potentiellement combiner la simplicité de réalisation et de réglage d'un mode glissant simple et certaines propriétés intéressantes de la commande par modes glissants d'ordre supérieur retenue.

### 3.4.2 Précision dans le cas de modes glissants réels

Comme vu au chapitre précédent, une commande réelle présente toujours du *chattering*, ce qui empêche la variable de glissement et ses dérivées successives d'être rigoureusement égales à 0. Un régime glissant idéal n'est donc plus possible, les trajectoires du système ne peuvent plus être confinées à la surface de glissement, mais à un (proche) voisinage de cette dernière. Il se met en place un mode glissant *réel*, dans lequel l'état du système oscille à haute fréquence d'un côté à l'autre de la surface. L'étude précise de ce phénomène, et notamment une évaluation de l'erreur maximale engendrée, est difficile. Néanmoins, une étude qualitative de la précision peut être faite en s'intéressant à la variation de l'erreur  $\theta(\epsilon)$  en fonction de la variation des imperfections  $\epsilon$  à l'origine du *chattering*, pour de petites perturbations.

**Définition 3.6.** Soit  $\theta(\epsilon)$  une fonction à valeur réelle telle que  $\theta(\epsilon) \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Un algorithme de commande par modes glissants de variable de commutation  $\sigma = 0$  est dit d'ordre réel  $r$  si, pour toute condition initiale dans un compact, il existe une constante  $C > 0$  telle que l'inégalité suivante soit satisfaite après un temps fini

$$|\sigma| \leq C |\theta(\epsilon)|^r \quad .$$

À constante  $C$  égale, plus l'ordre de glissement  $r$  est grand, meilleure est la précision. Il n'existe malheureusement à ma connaissance peu de travaux s'intéressant à la valeur, ou à l'évolution de  $C$  avec l'ordre de glissement.  $\epsilon$  est classiquement soit un retard (ou dynamique négligée) soit une imprécision sur la connaissance de l'état du système. L'origine physique de  $\epsilon$  a une incidence importante sur l'ordre de glissement, et les deux causes précédentes doivent être étudiées séparément.

#### Imprécision découplant d'un retard

Appelons  $t_1$  l'instant où le système est sur la surface de glissement ( $\sigma = 0$ ), c'est à dire l'instant où il change de demi espace et où la commande, dans le cas idéal, devrait commuter. Pour simplifier l'exposé, on suppose qu'il devrait commuter de  $u_m$  à  $u_M$ , la démarche étant la même dans le cas contraire. Appelons  $t_2$  l'instant où la variable de commutation  $\sigma$  atteint son maximum, c'est à dire l'instant où la commande devient suffisamment grande pour compenser la dynamique propre du système et les perturbations.

Considérons un majorant  $\Delta t$  du retard  $t_2 - t_1$  entre ces deux instants qui, dans le cas idéal, devraient être confondus. Ce retard inclut toutes les causes indiquées au §2.4. Un majorant de l'erreur sur la sortie  $\sigma$  et sur ses dérivées successives, en ne considérant que l'effet des retards, est donné par le théorème suivant :

**Theorème 3.7.** [Lev93] Si

- $\sigma^{(r)}$  est bornée sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$
- il existe un régime glissant faisant tendre  $\sigma$  vers 0 dans le cas idéal.

alors il existe  $r$  constantes  $C_1, \dots, C_r$  telles que  $|\sigma| \leq C_1 \Delta t^r$ ,  $|\dot{\sigma}| \leq C_2 \Delta t^{r-1}$ ,  $\dots$ ,  $|\sigma^{(r-1)}| \leq C_r \Delta t$ .

**Lemme 3.8.** [Lev93] Il existe une constante  $C$  telle que, pour toute fonction  $f(t) \in \mathcal{C}^r$  définie sur un intervalle de longueur  $T$ , il existe un point  $t_0$  de l'intervalle tel que

$$|f(t_0)^{(r)}| \leq C \sup_t |f| T^{-r}$$

On voit donc qu'il suffit qu'une sortie (réelle ou virtuelle) soit :

- de degré relatif  $r$  par rapport à une commande discontinue,
- idéalement (en ne tenant pas compte du *chattering*), nulle ou d'amplitude négligeable par rapport à celle du *chattering*

pour qu'en présence de *chattering*, elle soit dans un régime glissant d'ordre  $r$ . Cela se produit :

- en un temps fixé par le réglage de la commande si cette dernière est de mode glissant idéal d'ordre  $r$ . Dans ce cas, l'instant à partir duquel on entre dans la phase de glissement est fixe, défini par les réglages de la loi de commande.
- en un temps dépendant de la dynamique du système réduit et de l'imprécision due au *chattering* si la commande est de mode glissant d'ordre strictement inférieur à  $r$ . Prenons l'exemple typique d'une commande par modes glissants classique et considérons l'erreur sur la sortie réelle (pas la sortie virtuelle  $\sigma$ ). Dans ce cas, le système arrive sur la surface de glissement ( $\sigma = 0$ ) en temps fini, et converge vers l'origine de l'espace d'état suivant la dynamique du système réduit, asymptotiquement stable. Donc on n'atteint le régime stationnaire qu'au moment où l'erreur théorique est négligeable par rapport à l'imprécision due au *chattering*. Accélérer les dynamiques du système réduit avance ce moment tandis que réduire le *chattering* le retarde.

*Remarque 3.6.* Il faut que le degré relatif de la sortie soit au moins égal à  $r$  (si la commande est discontinue) pour avoir un mode glissant réel d'ordre  $r$  vis à vis d'un retard. En effet, si le degré relatif est plus faible, la cascade d'intégrateurs ne peut plus aussi bien jouer son rôle de filtre, et la précision asymptotique se réduit.

### Imprécision découlant d'une erreur de mesure ou d'observation

Après avoir vu l'effet d'un retard, intéressons nous maintenant aux effets d'une imprécision dans la connaissance de l'état du système. L'état mesuré ou observé est de la forme  $\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}$  où  $\mathbf{x}$  est le véritable état, et  $\boldsymbol{\epsilon}$ , l'erreur de mesure ou d'observation.

Cette erreur va conduire la commande à prendre une mauvaise décision. Une commande discontinue forçant le système sur la surface de glissement s'écrit

$$u = -K \operatorname{sign}(\sigma(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}))$$



On voit donc que dans un voisinage de la surface définie par  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\epsilon$  peut conduire le régulateur à envoyer un signal de commande ayant la mauvaise polarité, ce qui va le conduire à s'écarter de la surface de glissement au lieu de s'en rapprocher. Représentons par le compact  $\mathcal{E}$  l'ensemble des valeurs possibles de  $\epsilon$ . Une fois que l'état a atteint la zone  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ , on ne peut pas garantir qu'il s'approchera davantage de la surface.

Supposons que l'état est observé grâce à un dérivateur (tenant éventuellement compte de la dynamique du système) ayant une précision asymptotique optimale,

$$\epsilon = [\mathcal{O}(\epsilon) \quad \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \quad \dots \quad \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n-1}}) \quad \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n}})]^T$$

où  $\epsilon$  est la précision de la mesure (le bruit de mesure du capteur).

Dans le cas d'un mode glissant classique,  $\sigma(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n$ . Un majorant de l'erreur sur la variable de glissement est donc  $\lambda_1 \mathcal{O}(\epsilon) + \lambda_2 \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \dots + \lambda_{n-1} \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n-1}}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n}}) = \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n}})$ . Un mode glissant classique ne permet donc d'assurer qu'un mode glissant réel d'ordre 1 quand l'estimation de l'état provient d'un dérivateur asymptotiquement optimal.

Pour avoir la précision asymptotique d'un mode glissant d'ordre supérieur réel, il faut que la commande remplisse certaines conditions (par exemple, la surface de glissement doit avoir une forme particulière). Une loi de commande homogène ayant des poids de mode glissant d'ordre  $r$  assure une précision asymptotique de mode glissant réel d'ordre  $r$ . En effet, l'erreur de mesure issue d'un dérivateur de Levant est homogène, de poids de mode glissant d'ordre  $r$  (§3.3.1). Or, d'après le Thm. 3.2, une commande homogène ayant les poids adaptés converge vers un voisinage de 0. Comme ce voisinage est homogène de poids de mode glissant d'ordre  $r$ , la commande est une commande par modes glissants d'ordre  $r$ .

L'expression “modes glissants d'ordre supérieur” regroupe donc deux notions distinctes :

- celle de **Mode glissant idéal d'ordre  $r$**  liée à la convergence en temps fini de la variable de glissement et de ses  $(r-1)^e$  dérivées vers 0 dans le *cas idéal*, c'est à dire *sans* retard ou erreur d'estimation de l'état (mais en incluant les éventuelles perturbations co-incidentes).
- et celle de **Mode glissant réel d'ordre  $r$**  correspondant à la précision asymptotique obtenue quand on *considère l'effet* de retards ou d'erreurs d'estimation de l'état.

Ces notions ne sont pas liées. Un mode glissant d'ordre 1 n'est pas un mode glissant *idéal*, mais c'est un mode glissant d'ordre supérieur *réel* si le système n'est soumis qu'à des retards purs, et que tout l'état est parfaitement connu (mais il n'est pas d'ordre supérieur réel face à des erreurs d'observation provenant d'un observateur de précision asymptotique optimale). *A contrario*, un mode glissant d'ordre supérieur *idéal* peut ne pas être un mode glissant d'ordre supérieur *réel* face à des erreurs d'observation, comme le montre l'exemple du §3.6.4.

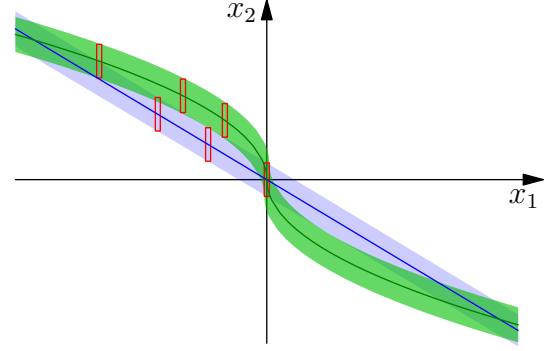


FIG. 3.2 – Zones d'effet d'une erreur de mesure/d'observation  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$  pour une commande par mode glissant classique (bleu) et une commande par mode glissant homogène d'ordre 2 (vert), étant donné un ensemble  $\mathcal{E}$  (cadres rouges).

### 3.5 Quelques exemples de commandes par modes glissants d'ordre 2

L'étude des systèmes de degré relatif 2 ou moins, et donc des commandes par modes glissants d'ordre 2, est plus facile que celle des systèmes d'ordre plus élevé pour plusieurs raisons. On peut en citer quelques unes :

- Il y a peu de dynamiques à prendre en compte simultanément, et elles sont comparativement plus faciles à stabiliser que pour un système d'ordre élevé. Par exemple, un système linéaire stable a une marge de phase infinie, ou une commande par modes glissants simples n'utilisant que l'information de sortie n'est pas toujours instable (cf. le résultat de [Ano59, Tsy84] présenté dans l'introduction de ce chapitre).
- En utilisant des lois de commande homogènes, qui permettent de réduire la dimension du problème de 1 grâce à la dilatation, il ne reste plus qu'1 degré de liberté, ce qui permet des approches empiriques ou systématiques, dans la recherche de réglage du gain, par exemple.
- L'étude peut se faire dans le plan de phase, suivant des méthodes graphiques.

On considère ici soit un intégrateur perturbé (de degré relatif 1), soit un double intégrateur perturbé (de degré relatif 2) de variables d'état  $\sigma_1$  et  $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]^T$  respectivement, avec  $\sigma_1$  comme sortie. On considère donc des systèmes sous la forme (2.1), avec  $\psi(\mathbf{x}, t) = 0$  et en supposant les bornes constantes, soit :

- Pour un intégrateur simple :  $\dot{\sigma}_1 \in [-C, C] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u$
- Pour un double intégrateur :  $\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \sigma_2 \\ \dot{\sigma}_2 \in [-C, C] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u \end{cases}$

Tous les algorithmes présentés ici sont homogènes de degré  $-1$  et de dilatation  $d_\kappa(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\kappa^2\sigma_1, \kappa\sigma_2)$ , donc de poids de modes glissants d'ordre 2.

#### 3.5.1 L'algorithme du *twisting* [Lev93]

En plus de commuter le signe de la commande, cet algorithme commute son amplitude entre deux valeurs en fonction du quadrant dans lequel se trouve l'état du système. La trajectoire du système dans le plan de phase tourne autour de l'origine, en s'en rapprochant à la manière d'une spirale.

Son expression pour un système de degré relatif 2 est

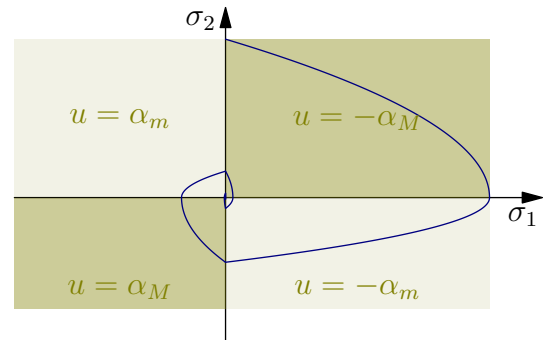


FIG. 3.3 – Twisting avec  $\alpha_M = 3$ ,  $\alpha_m = 0.5$

$$u = \begin{cases} -\alpha_m \operatorname{sign}(\sigma_1) & \text{si } \sigma_1\sigma_2 < 0 \\ -\alpha_M \operatorname{sign}(\sigma_1) & \text{si } \sigma_1\sigma_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

avec  $\alpha_m$  et  $\alpha_M$  vérifiant

$$\begin{aligned}\alpha_M &> 4 \frac{\Gamma_m}{\sigma_{max}} \\ \alpha_m &> \frac{C}{\Gamma_m} \\ \gamma_m \alpha_M - C &> \Gamma_M \alpha_m + C\end{aligned}$$

où  $\sigma_{max}$  est la valeur absolue que peut prendre  $\sigma_1$  (souvent contrainte physiquement ou techniquement).

L'homogénéité de cette loi de commande est évidente, car son expression ne dépend pas de la valeur de  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$ , mais seulement de leur signe, qui ne varie pas en les multipliant par  $\kappa > 0$ . Les demi droites de commutation sont des “rayons homogènes”, elles sont invariantes par dilatation de poids de mode glissant d'ordre 2 (car  $\kappa^2 \sigma_1 = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 0$  et  $\kappa \sigma_1 = 0 \Leftrightarrow \sigma_2 = 0$ ).

On peut également adapter cet algorithme pour commander un système de degré relatif 1 en augmentant le système d'un intégrateur, autrement dit en contrôlant  $\dot{u}$  au lieu de  $u$  directement. L'intérêt est d'atténuer le *chattering* en rendant la commande continue. Mais il faut en plus prendre en compte la saturation de la commande  $u$  (équivalente à la saturation de  $\sigma_2$  dans le cas d'un degré relatif 2) [Lev93].

### 3.5.2 Commande sous-optimale par modes glissants d'ordre deux [BAG99]

Cet algorithme s'inspire de la commande à temps minimal d'un double intégrateur. Au lieu de commuter en fonction de l'état, ce qui nécessiterait la connaissance de la totalité de ce dernier, il essaie de deviner l'instant de commutation en n'utilisant que la sortie  $\sigma_1$ .

Cet algorithme commence par une phase d'initialisation dont le but est d'arrêter le système, *c.à.d* d'imposer  $\dot{\sigma}_1 = 0$ . Appelons  $t_M$  l'instant où  $\dot{\sigma}_1 = 0$  et étudions le cas  $\sigma_1(t_M) > 0$ . Si le système était un double intégrateur pur, la séquence de commande à partir  $t_M$  serait  $u = -u_M$ , puis  $u = u_M$  à la moitié du temps de convergence, ce qui correspond à un point de commutation quand la sortie est à mi chemin de 0, soit  $\sigma_1(t_M)/2$ . Cette trajectoire théorique est indiquée en pointillés dans les figures suivantes.

Mais il faut également prendre en compte la perturbation. L'algorithme diminue l'amplitude de la commande pendant la 2<sup>e</sup> phase, pour être sûr qu'au moment  $t_{M_2}$  où l'état atteint une nouvelle fois l'axe des abscisses,  $|\sigma_1(t_{M_2})| < |\sigma_1(t_M)|$ .  $\sigma_1(t_{M_2})$  peut cependant être négatif, ce qui conduit le système à tourner autour de l'origine (Fig. 3.4), ou positif, ce qui amène le système à “rebondir” sur l'axe des abscisses (Fig. 3.5). Quant l'état atteint

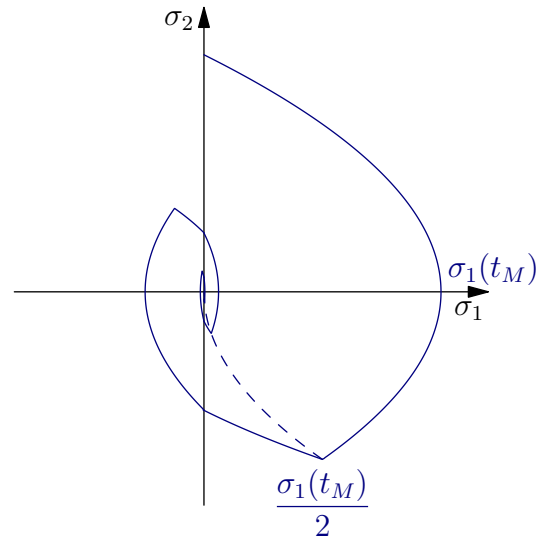


FIG. 3.4 – Algorithme sous optimal sans perturbation avec  $u_M = 5$ ,  $\lambda^* = 0.5$ .

(en temps fini) l'abscisse  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2$  a le même signe qu'au départ, mais est plus faible. En répétant cette séquence un nombre infini de fois, on converge en temps fini à l'origine.

L'expression mathématique de cet algorithme est

$$u(t) = \lambda(t)u_M \operatorname{sign}\left(\sigma_1(t) - \frac{\sigma_1(t_M)}{2}\right) \quad (3.6)$$

$$\text{avec } \lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\sigma_1(t)| \geq |\sigma_1(t_M)| \\ \lambda^* & \text{si } |\sigma_1(t)| < |\sigma_1(t_M)| \end{cases}$$

et  $t_M$ , le dernier moment où l'état a atteint l'abscisse  $\sigma_2 = 0$ .

Les conditions sur le gain  $\lambda^*$  pour avoir une convergence en temps fini sont

$$\lambda^* \in ]0; 1] \cap ]0, \frac{3\Gamma_m}{\Gamma_M}[$$

$$u_M > \max\left(\frac{C}{\lambda^*\Gamma_m}, \frac{4C}{3\Gamma_m - \lambda^*\Gamma_M}\right)$$

L'homogénéité de cet algorithme est simple à établir, car il ne dépend que de comparaisons de différentes valeurs de  $\sigma_1$ . Or, multiplier différentes valeurs par  $\kappa^2 > 0$  ne change pas leur ordre.

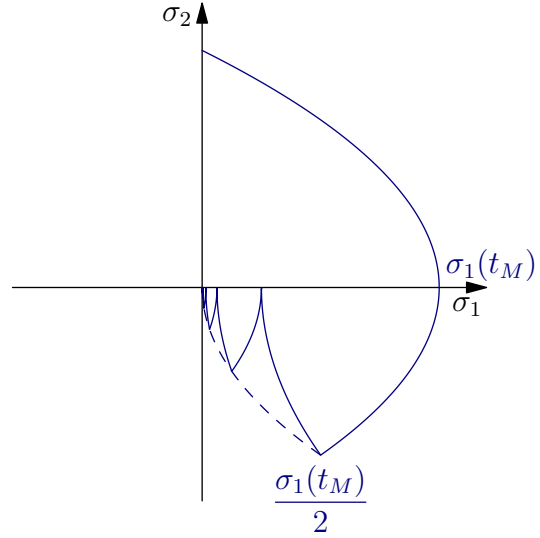


FIG. 3.5 – Algorithme sous optimal sans perturbation avec  $u_M = 5$ ,  $\lambda_{eq}^* = 2$ .

### 3.5.3 L'algorithme du *super twisting* [Lev93]

Cet algorithme ne s'applique qu'à des systèmes de degré relatif 1 dont la perturbation est Lipschitz. Son intérêt réside dans la réduction du *chattering*, due à la continuité du signal de commande. Cette commande se décompose en un terme algébrique (non dynamique) et un terme intégral. On peut donc considérer cet algorithme comme une généralisation non linéaire d'un PI. Si le système physique n'est pas de degré relatif 1 et que  $\sigma_1$  est en fait une surface dépendant de la dérivée de la sortie, on a une généralisation non linéaire d'un PID.

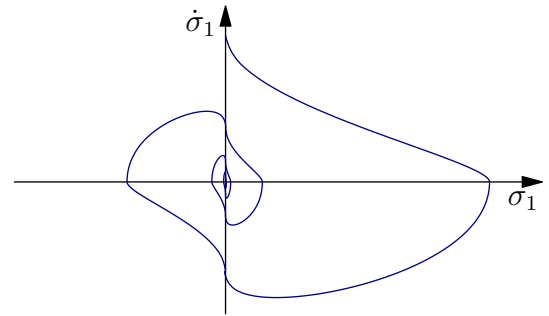


FIG. 3.6 – *Super twisting* avec  $\lambda_2 = 1.1$ ,  $\lambda_1 = 1.4$

L'algorithme du *super twisting*, à l'instar du sous-optimal, entraînant l'annulation de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 = \dot{\sigma}_1$  en temps fini tout en ne requérant que le signal  $\sigma_1$ , permet de construire un dérivateur [Lev98]. De fait, cet algorithme est à la base du dérivateur présenté au §3.3.2. L'estimation de la dérivée est ici la commande nécessaire pour annuler  $\sigma_2$ , puisque  $\sigma_2(t) = \dot{f}(t) - u(t)$ . Pour faciliter la comparaison entre la commande et le dérivateur, les paramètres du *super twisting* sont exprimés ici dans les mêmes termes. Pour ce faire, on considère le système suivant, en considérant  $\sigma_2$  comme la perturbation.

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &\in \sigma_2 + [\Gamma_m, \Gamma_M]u \\ \dot{\sigma}_2 &\in [-C, C]\end{aligned}$$

L'algorithme du *super twisting* s'écrit

$$\begin{aligned}u(t) &= u_I(t) - \lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1) \\ \dot{u}_I(t) &= -\lambda_2 L \text{sign}(\sigma_1)\end{aligned}\tag{3.7}$$

avec  $L = \frac{C}{\Gamma_m}$ ,  $\lambda_2 > 1$  et

$\lambda_1 > \sqrt{-2\lambda_2 + 2\sqrt{\lambda_2^2 + 2\lambda_2 + 2}}$  (voir la section suivante pour la preuve). Les valeurs communément utilisées pour la commande sont  $\lambda_2 = 1.1$  et  $\lambda_1 = 2$  (pour le dérivateur, on utilise plutôt  $\lambda_2 = 1.1$  et  $\lambda_1 = 1.5$ , voire plus loin).

Prouver l'homogénéité par les poids de mode glissant d'ordre 2 du système piloté par cette loi de commande n'est cette fois ci pas trivial et requiert d'effectuer les calculs.

$$\begin{aligned}d_\kappa(\dot{\sigma}) &= \begin{bmatrix} \kappa \sigma_2 - [\Gamma_m, \Gamma_M] \lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\kappa^2 \sigma_1|} \text{sign}(\kappa^2 \sigma_1) \\ [-C, C] - \lambda_2 L \text{sign}(\kappa^2 \sigma_1) \end{bmatrix} \\ &= \kappa^{-1} \begin{bmatrix} \kappa^2 (\sigma_2 - [\Gamma_m, \Gamma_M] \lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1)) \\ \kappa ([-C, C] - \lambda_2 L \text{sign}(\sigma_1)) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui prouve que le système bouclé est bien homogène.

On peut remarquer 2 différences entre la commande et le dérivateur :

- le dérivateur ne prend pas  $u(t)$  comme estimateur de la dérivée, mais  $u_I(t)$ . En théorie, quand  $\sigma_1$  est nul, cela ne change rien, les deux estimateurs sont identiques. Mais en pratique, le terme  $\lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1)$  n'est pas nul ; seule sa moyenne est nulle (ou quasiment). Par contre, il est oscillant avec une haute fréquence : c'est essentiellement du *chattering*. Le supprimer de l'estimation de la dérivée permet donc d'améliorer la précision.
- la valeur recommandée du coefficient  $\lambda_1$  est de 1.5 pour le dérivateur, de 2 pour la commande. Le terme  $\lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1)$  est un terme stabilisant et surtout amortissant les oscillations. Le terme  $\lambda_2 L \text{sign}(\sigma_1)$  ne contribue pas à l'amortissement des oscillations, car il ne dépend que de la sortie alors qu'il est de degré relatif 2 (cf la remarque au début de ce chapitre [Ano59, Tsy84]). Pour avoir un bon comportement transitoire, la valeur de  $\lambda_1$  doit donc être plus grande que le strict nécessaire pour la simple stabilité. Mais dans le cas du dérivateur, le terme  $\lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1)$  doit simultanément être le plus faible possible, car il perturbe l'estimation de la dérivée. Il est donc nécessaire dans ce cas de le réduire à la valeur minimale assurant un transitoire correct, alors qu'il est souvent plus utile pour une commande de réduire fortement les oscillations.

Il existe différentes preuves de stabilité pour cet algorithme

- La preuve originelle de [Lev98]. C'est une preuve géométrique, basée sur l'intégration numérique du pire cas indiquant pour un jeu de coefficients  $[\lambda_1, \lambda_2]$  donné s'il est toujours stable ou pas. Elle fournit la preuve la moins conservatrice, celle qui permet d'avoir les coefficients les plus faibles, mais n'est pas constructive : il faut tester chaque jeu de coefficients candidat.

- Une autre possibilité est d'intégrer analytiquement le pire cas [DLL05]. Cela n'est pas possible directement ; il faut intégrer un majorant, une enveloppe des trajectoires. Cette preuve donne des conditions analytiques, contrairement à la précédente, mais légèrement plus conservatives. Elles permettent néanmoins de prouver la stabilité pour les coefficients couramment utilisés en pratique (ou approchant), car ces derniers doivent en plus limiter les oscillations. Les preuves restent difficilement transposables à d'autres algorithmes, même si l'approche est plus générale que la preuve numérique, car les simplifications sont spécifiques au *super twisting*. Leur étude est néanmoins utile, car elles permettent d'avoir une idée intuitive du fonctionnement de l'algorithme et du rôle des différents termes. Une preuve originale plus précise que celle de [DLL05] est donnée dans le §3.7.
- Une troisième voie est basée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov [MO08]. Ces preuves sont les plus conservatives, ne prouvant la stabilité que pour des valeurs de coefficients très élevées, mais sont les plus faciles à généraliser à des algorithmes similaires, ou d'ordres supérieurs.

## 3.6 Quelques exemple de commandes par modes glissants d'ordre arbitraire

Les commandes par modes glissants d'ordre supérieur à 2 sont plus difficiles à concevoir, comme mentionné au début de la section précédente. Beaucoup d'algorithmes d'ordre arbitraire connus ont une forme réursive, ne considérant qu'une dynamique à la fois.

Pour bien montrer la difficulté de concevoir de telles lois de commande, cette section donne également des exemples qui ont été considérés à tort comme d'ordre supérieur, ou qui sont uniquement d'ordre supérieur *idéal* sans être *réel*.

### 3.6.1 Terminal sliding mode [YM94]

Cet algorithme est, à ma connaissance, la plus ancienne loi de commande par modes glissants d'ordre supérieur. Pour un système sous la forme canonique de commandabilité (2.1), cette loi de commande est définie pour un ordre  $n$  par :

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= x_1 \\ \sigma_i &= \dot{\sigma}_{i-1} + c_i \sigma_{i-1}^{\frac{q_i}{p_i}} \quad 1 \leq i \leq n-1\end{aligned}\tag{3.8}$$

avec  $q_i$  et  $p_i$  des entiers pairs tels que  $q_i < p_i$ .

Elle se base sur la propriété de convergence en temps fini des équations différentielles du type :

$$\dot{\sigma} + c\sigma^{\frac{q}{p}} = 0$$

En effet, son intégration donne le temps requis pour atteindre  $\sigma = 0$  :

$$T = \int_{s_0}^0 \frac{d\sigma}{-c\sigma^{\frac{q}{p}}} = \frac{p}{c(p-q)} |\sigma_0|^{1-\frac{q}{p}}$$

L'algorithme fonctionne récursivement. Si une loi de commande garantit que  $\sigma_{n-1} = 0$ , alors  $\sigma_{n-2}$  s'annule en temps fini, et ainsi de suite jusqu'à  $\sigma_0$ . Cette loi de commande assurant une convergence en temps fini vers l'origine est donc  $u = -u_M \text{sign}(\sigma_{n-1})$ .

Cet algorithme a un problème de singularité : la commande tend vers l'infini si l'état initial est dans un ensemble "interdit". [FYM02] propose une solution à ce problème.

### 3.6.2 Algorithmes de Levant [Lev01, LP08]

L'idée précédente a inspiré un autre ensemble de lois de commandes proposées par Arie Levant.

La première de ces lois de commande repose sur l'utilisation de différentes surfaces de glissement, chacune faisant converger le système en temps fini vers la prochaine surface. Par contre, une fois atteinte la surface suivante, le système peut quitter la surface d'origine. L'état du système transite donc d'une surface à l'autre alternativement jusqu'à atteindre l'origine, en temps fini.

En posant

$$\begin{aligned} N_{1,n} &= |\sigma_1|^{(n-1)/n} \\ N_{i,n} &= (|\sigma_1|^{(m/n)} + |\sigma_2|^{(m/(n-1))} + \dots + |\sigma_i^{(i-1)}|^{(m/(n-i+1))})^{(n-i)/m}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ N_{n-1,n} &= (|\sigma_1|^{(m/n)} + |\sigma_2|^{(m/(n-1))} + \dots + |\sigma_i^{(n-1)}|^{(m/2)})^{1/m} \\ \phi_{0,n} &= \sigma_1 \\ \phi_{1,n} &= \sigma_2 + \beta_1 N_{1,n} \text{sign}(\sigma_1) \\ \phi_{i,n} &= \sigma_i + \beta_i N_{i,n} \text{sign}(\phi_{i-1,n}), \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

L'algorithme pour un ordre  $n$  s'écrit :

$$u = -\alpha \text{sign } \phi_{(n-1,n)}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$$

Cette commande ne présente pas de problème de singularité, mais elle est discontinue. Un deuxième algorithme permet de supprimer les discontinuités sauf en l'origine<sup>9</sup>.

Les termes intermédiaires sont

$$\begin{aligned} N_{0,n} &= |\sigma_1| \\ N_{i,n} &= |\sigma_i| + \beta_i N_{i,n}^{\frac{n-i}{n-i+1}}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \phi_{0,n} &= \sigma_1 \\ \phi_{i,n} &= \sigma_i + \beta_i N_{i,n}^{\frac{n-i}{n-i+1}} \psi_{i-1,n}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \psi_{i,n} &= \frac{\phi_{i,n}}{N_{i,n}} \end{aligned}$$

L'algorithme pour un ordre  $n$  s'écrit alors :

$$u = -\alpha \text{sign } \psi_{(n-1,n)}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$$

### 3.6.3 Commande optimale quadratique [LSPB06, Lag04]

Ce paragraphe présente une commande par modes glissants qui, du point de vue théorique, serait d'ordre supérieur, mais dont la réalisation pratique est impossible tel quel pour des raisons calculatoire. De surcroît, même si elle était réalisable, la réalisation théorique serait instable.

Cette commande se distingue par le calcul de la surface de glissement, qui obéit à une contrainte d'optimalité quadratique tout en convergeant en temps fini.

---

<sup>9</sup>La discontinuité en l'origine est nécessaire pour la robustesse, à moins d'utiliser un terme dynamique (en général intégral)

Elle doit satisfaire le critère d'optimalité

$$J = \int_0^{t_f} \mathbf{x} \mathbf{Q}' \mathbf{x} dt \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{Q}'$  est une matrice symétrique définie positive. De plus, le système doit atteindre exactement un état final  $\mathbf{x}_f$  en le temps fini  $t_f$ .

En découpant le système non linéaire à commander en une partie linéaire d'état  $\mathbf{x}_a = [x_1 \dots x_{n-1}]^T$ , et une dynamique non linéaire, celle de  $x_n$ , on peut considérer  $x_n$  comme une entrée fictive du sous système d'état  $\mathbf{x}_a$ .

Le système devient

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_a &= \mathbf{A} \mathbf{x}_a + \mathbf{b} x_n \\ \dot{x}_n &\in \psi(\mathbf{x}, t) + [-C(\mathbf{x}, t), C(\mathbf{x}, t)] + [\Gamma_m(\mathbf{x}, t), \Gamma_M(\mathbf{x}, t)]u \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et  $\mathbf{b} = [0 \dots 0 \ 1]^T$

Le critère d'optimalité devient

$$J = \int_0^{t_f} \mathbf{x}_1 \mathbf{Q} \mathbf{x}_1 + x_n \mathbf{R} x_n dt \quad (3.10)$$

moyennant éventuellement un changement de variable (voir [Lag04]), à moins que la matrice  $\mathbf{Q}'$  n'aie pas de terme croisé entre  $\mathbf{x}_a$  et  $x_n$ .

### Expression de la commande

Ce critère est le critère d'optimalité quadratique classique (à la contrainte temporelle près), fondamentalement différent du critère de temps minimal, qui induit une commande non linéaire, de type bang bang. La commande induite par le critère quadratique est une commande linéaire temporellement variante.

Elle est la solution du système [Lag04]

$$x_n(t) = -(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{V}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) \mathbf{V}(t)^T) \mathbf{x}_a(t) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}(t)^T \mathbf{V}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) \mathbf{x}_{af}$$

où

- $\mathbf{x}_{af}$  est la valeur finale désirée de  $\mathbf{x}_a$ ,
- $\mathbf{P}(t)$  est la solution de l'équation différentielle de Ricatti

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{P}_f \quad \text{définie positive}$$

- $\mathbf{V}(t)$  est la solution de

$$-\dot{\mathbf{V}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \mathbf{V} \quad , \quad \mathbf{V}(t_f) = \mathbf{I}_n$$



–  $\mathbf{H}(t)$  est la solution de

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{V}^T \mathbf{b} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{V} \quad , \quad \mathbf{H}(t_f) = \mathbf{0}_n$$

L'entrée fictive  $x_n$  doit obéir à une loi de commande du type

$$x_n = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}_a$$

En la réécrivant comme  $x_n - \mathbf{F}(t) \mathbf{x}_a$ , on voit immédiatement qu'elle définit une hypersurface sur laquelle peut se baser une commande par modes glissants. En prenant l'origine de l'espace d'état pour objectif<sup>10</sup>, cette surface temporellement variante est définie par :

$$x_n(t) - (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{V}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) \mathbf{V}(t)^T) \mathbf{x}_a(t) = 0$$

**Problème à  $t = t_f$**

On voit que la loi de commande précédente pose un problème pour  $t = t_f$ , car  $\mathbf{H}(t_f) = \mathbf{0}_n$ . Il est donc impossible d'inverser cette matrice près de  $t = t_f$ . Ce problème d'implémentation est la conséquence d'un problème plus fondamental :

**Theorème 3.9.** *Une commande linéaire temporellement variante à pôles réels ne peut pas avoir une convergence en temps fini vers l'origine si au moins un pôle est fini et que l'état initial est non nul.*

*Démonstration.* Supposons qu'un pôle (éventuellement multiple) d'un système en boucle fermée reste constamment compris dans l'intervalle  $[\lambda_1, \lambda_2]$ . En exprimant le système sous forme modale et en ne s'intéressant qu'au sous système correspondant au pôle étudié,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \|e^{\mathbf{A}t}\| \|\mathbf{x}(0)\|$$

avec  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_1 \end{bmatrix}$ . On voit donc que  $\mathbf{x}$  ne peut pas atteindre  $\mathbf{0}$  en temps fini. □

La seule manière d'atteindre l'origine si les pôles sont réels est donc de déplacer tous les pôles vers  $-\infty$ . C'est ce que fait (ou tente de faire) la loi de commande précédente. La surface de commutation tend du coup vers celle d'un mode glissant classique,  $\sigma = x_1 = 0$ . Or, cette loi de commande n'est pas toujours stable pour un système de degré relatif égale à 2, et toujours instable pour un degré relatif supérieur (cf. §3.1).

La solution retenue en pratique est de stopper l'évolution de la loi de commande à partir d'un temps  $t_1 < t_f$ , autrement dit, de garder une commande par mode glissant d'ordre 1 à partir de  $t_1$ .

Cette commande est donc soit instable et inapplicable, soit d'ordre 1.

---

<sup>10</sup>Cela est toujours possible moyennant un changement de variable

### 3.6.4 Commande basée sur des trajectoires précalculées [PGL08]

Un dernier exemple de loi de commande est un mode glissant d'ordre supérieur *idéal*, mais qui ne présente pas la précision asymptotique d'un mode glissant *réel*. Cette loi de commande repose sur l'utilisation de trajectoires calculées à  $t = 0$ . À cet instant, connaissant l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , on peut calculer une trajectoire qui, si le système la suit parfaitement, fait converger ce dernier vers l'origine de l'espace d'état en temps fini. Une commande par modes glissants classiques assure que le système suit la trajectoire prévue.

Cette commande est un mode glissant d'ordre supérieur *idéal*, car la sortie et ses dérivées successives convergent vers 0 en temps fini. Mais ce n'est pas un mode glissant d'ordre supérieur *réel*, car l'annulation de la sortie et de ses dérivées en temps fini provient d'une trajectoire prédéfinie, pas de la partie en boucle fermée de la loi de commande. Cette dernière utilisée seule ne permettrait qu'une convergence exponentielle, car il s'agit d'une commande par modes glissants classiques. Or, la réjection des perturbations, retards et erreurs de mesure n'est prise en charge que par la fermeture de la boucle, qui est ici une commande par modes glissants d'ordre 1. Or, le §3.4.2 indique que dans ce cas, il s'agit de mode glissant réel d'ordre 1.

C'est la boucle fermée qui détermine l'ordre *réel* d'un mode glissant. Dans le cas d'une commande par modes glissants déterminée par une surface, c'est la forme de cette surface qui importe.

## 3.7 Une preuve originale de stabilité du *super twisting*

Cette section présente une preuve de convergence originale du *super twisting*, raffinement de celle de [DLL05]. Elle permet d'avoir une condition analytique du choix des gains relativement peu conservatrice. La seule méthode moins conservatrice est, à ma connaissance, la preuve numérique de [Lev98]. Cette preuve me paraît également intéressante du point de vue pédagogique, car elle donne un exemple d'exploitation de l'homogénéité pour circonscrire un problème, ainsi qu'une appréciation intuitive du rôle de chaque terme dans l'algorithme du *super twisting*.

Pour simplifier la preuve, considérons que le gain  $\Gamma$  est parfaitement connu et égal à 1. En effet, s'il est différent de 1, il suffit de diviser l'état et les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et l'incertitude additive par la valeur minimale  $\Gamma_m$  de  $\Gamma$  pour obtenir que les coefficients sont supérieurs à  $\frac{\lambda_1}{\Gamma_m}$  et  $\frac{\lambda_2}{\Gamma_m}$ . L'incertitude, quant à elle, est inférieure à  $\frac{\Gamma_M}{\Gamma_m}C$ , si  $C$  est son majorant dans le modèle d'origine. Cette transformation d'état modifie le temps, mais n'a aucune influence sur la stabilité. Les résultats suivants sont donc immédiatement transposables.

Cette preuve est non seulement une preuve de convergence de la loi de commande, mais aussi du dérivateur, moyennant d'interpréter  $\sigma_1$  comme l'erreur entre le signal à dériver  $f(t)$  et son estimation.

Le *super twisting* s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \sigma_2 - \lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \operatorname{sign}(\sigma_1) \\ \dot{\sigma}_2 \in [-L, L] - \lambda_2 L \operatorname{sign}(\sigma_1) \end{cases} \quad (3.11)$$

Les trajectoires de cet algorithme tournent autour de l'origine. On peut donc sans perte de généralité prendre pour état initial  $\boldsymbol{\sigma}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2(0) > 0 \end{bmatrix}$ .

### 3.7.1 Condition de stabilité

La preuve commence par réduire le problème à l'analyse de certaines trajectoires dans une moitié du plan de phase par le lemme suivant :

**Lemme 3.10.** *Le système (3.11) converge en temps fini vers l'origine si et seulement si, en partant du point  $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , il croise l'axe des ordonnées en un point  $\sigma_f = \begin{bmatrix} 0 \\ |\sigma_2^f| < 1 \end{bmatrix}$  dans tous les cas,  $T$  étant l'instant de croisement.*

*De plus, connaissant la pire (en fonction des perturbations  $[-L, L]$ ) vitesse de convergence  $v_c = \frac{1 - |\sigma_2^f|}{T}$ , un majorant du temps de convergence est alors  $T_F = \frac{1}{v_c} = \frac{T}{1 - |\sigma_2^f|}$ .*

*Démonstration.* La loi de commande est impaire :  $u(-\sigma) = -u(\sigma)$ , il suffit donc d'étudier les trajectoires dans un demi-plan, les trajectoires dans l'autre s'en déduisant par symétrie par rapport à l'origine, à état initial et perturbation symétriques.

De plus, l'homogénéité du système bouclé permet d'utiliser la transformation

$$(t, \sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\kappa t, \kappa^2 \sigma_1, \kappa \sigma_2) \quad \text{avec } \kappa > 0$$

sur la totalité de la trajectoire dans un demi-plan. On peut choisir par exemple le demi-plan droit<sup>11</sup>. Cela suppose bien sûr que la perturbation est constante sur tout "rayon homogène", c.à.d arc de parabole  $\sigma = \begin{bmatrix} \kappa^2 \sigma_{c1} \\ \kappa \sigma_{c2} \end{bmatrix}$  paramétrée par  $\kappa \geq 0$ , avec  $\sigma_{c1}$  et  $\sigma_{c2}$  constants non simultanément nuls définissant la courbe. Cela est le cas si l'on considère le pire des cas, l'ensemble du système étant homogène.

Considérons une trajectoire partant de  $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2^0 > 0 \end{bmatrix}$  et arrivant à  $\sigma_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2^f < 0 \end{bmatrix}$  en un temps  $T$ . Vu qu'on ne s'intéresse qu'aux points de départ et d'arrivée, tous les deux d'abscisse nulle, on ne réfléchira dans la suite que sur les ordonnées. En lui appliquant la transformation homogène de facteur  $\kappa$ , l'ordonnée du point de départ est  $\kappa \sigma_2^0$ , celle du point d'arrivée,  $\kappa \sigma_2^f$ , et le temps passé,  $\kappa T$ .

Cela permet d'une part de ne considérer que les trajectoires démarrant à un point d'ordonnée 1, car toute autre trajectoire démarrant à  $\sigma_2^0 > 0$  peut y être ramenée par une dilatation de facteur  $1/\sigma_2^0$ .

D'autre part, cela permet de déduire la totalité de la trajectoire du système en appliquant une symétrie centrale et une dilatation homogène de facteur  $|\sigma_2^f|$  à chaque passage par l'axe des ordonnées. Après la première partie de trajectoire, la seconde (dans le demi-plan gauche) amènera le système au point d'ordonnée  $(|\sigma_2^f|)^2$  en un temps  $T + |\sigma_2^f|T$ , puis la 3<sup>e</sup> (dans le demi-plan droit) au point d'ordonnée  $-|\sigma_2^f|^3$  en un temps  $T + |\sigma_2^f|T + |\sigma_2^f|^2T$  et ainsi de suite.

Le système ne converge vers l'origine que si  $|\sigma_2^f| < 1$ . Et la série géométrique donnant le temps de convergence converge alors vers  $\frac{T}{1 - |\sigma_2^f|}$ .

On peut remarquer que, par homogénéité, la vitesse de convergence est constante, vu que  $|\sigma_2|$  diminue d'un facteur  $|\sigma_2^f|^n$  en un temps  $|\sigma_2^f|^n T$ . Connaître la pire vitesse de convergence permet d'avoir un majorant de la vitesse de convergence. Mais la valeur des

<sup>11</sup>Mais on pourrait tout aussi bien prendre le demi-plan gauche, ou les demi-plans haut ou bas

perturbations  $[-L, L]$  pour laquelle la vitesse de convergence est la plus lente n'est pas forcément celle pour laquelle  $|\sigma_2^f|$  est la plus grande, car elle dépend du rapport  $\frac{\sigma_2^f}{T}$ .  $\square$

### 3.7.2 Simplifications

Pour prouver la convergence, il suffit donc d'étudier les trajectoires dans le demi-plan droit à partir de l'état initial  $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  et prouver qu'elles quittent toutes ce demi-plan par un point d'ordonnée  $\dot{\sigma}$  supérieure à  $-1$ .

Pour simplifier les choses, exploitons encore une fois l'homogénéité par un facteur  $\frac{1}{L}$  et notons l'erreur  $\sigma$  au lieu de  $\sigma_1$ . Le nouveau système s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \sigma_2 - \lambda_1 \sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma) \\ \dot{\sigma}_2 &\in [-1, 1] - \lambda_2 \operatorname{sign}(\sigma)\end{aligned}$$

L'échelle de temps de ce nouveau système est comprimé d'un facteur  $\frac{1}{L}$ , mais cela ne change rien à l'étude de stabilité.

*Remarque 3.7.* Si  $\lambda_2 < 1$ , alors le terme  $\lambda_2 \operatorname{sign}(\sigma)$  est incapable de compenser totalement la perturbation si son amplitude est maximale. Comme le terme algébrique  $\lambda_1 \sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma)$  est nul quand  $\sigma = 0$ , la commande ne peut pas assurer une convergence en temps fini dans ce cas. Une première condition nécessaire de stabilité en temps fini est donc

$$\lambda_2 \geq 1$$

Comme dans [DLL05], on peut calculer les dérivées de  $\sigma$  pour  $\sigma \neq 0$

$$\ddot{\sigma} \in [-1, 1] - \lambda_2 \operatorname{sign}(\sigma) - \lambda_1 \frac{\dot{\sigma}}{2\sqrt{|\sigma|}} \quad (3.12)$$

En intégrant cette inclusion différentielle, il vient

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 - \alpha t - \lambda_1 \sqrt{|\sigma|} \quad (3.13a)$$

$$\ddot{\sigma} = -\alpha - \lambda_1 \frac{\dot{\sigma}}{2\sqrt{|\sigma|}} \quad (3.13b)$$

avec, d'après la Rem. 3.7,

$$\alpha \in [(\lambda_2 - 1), (\lambda_2 + 1)] > 0$$

### 3.7.3 Subdivision et pire cas

Le demi-plan droit peut être divisé en 2 secteurs principaux : le premier quadrant  $\dot{\sigma} > 0$  et le second  $\dot{\sigma} < 0$ . L'étude se cantonne au pire cas en terme de stabilité, pas de vitesse de convergence.

Dans le premier quadrant, la pire trajectoire est celle amenant le système sur l'axe des abscisses ( $\dot{\sigma} = 0$ ) le plus loin possible de l'origine. La valeur correspondante de  $\sigma$  sera notée  $\sigma_M$ . Cela se produit lorsque  $\dot{\sigma}$  est toujours maximum, *c.à.d* quand la perturbation prend la valeur 1, donc  $\alpha = \lambda_2 - 1$ , noté  $\alpha_1$ .

Dans le second quadrant, la pire trajectoire est celle pour laquelle la valeur finale de  $\dot{\sigma}$  est la plus petite. Elle sera notée  $\dot{\sigma}_f$ . Cela arrive quand  $\dot{\sigma}$  est toujours minimum (maximum en valeur absolue), donc quand la perturbation prend la valeur  $-1$ , donc  $\alpha = \lambda_2 + 1$ , noté  $\alpha_2$ .

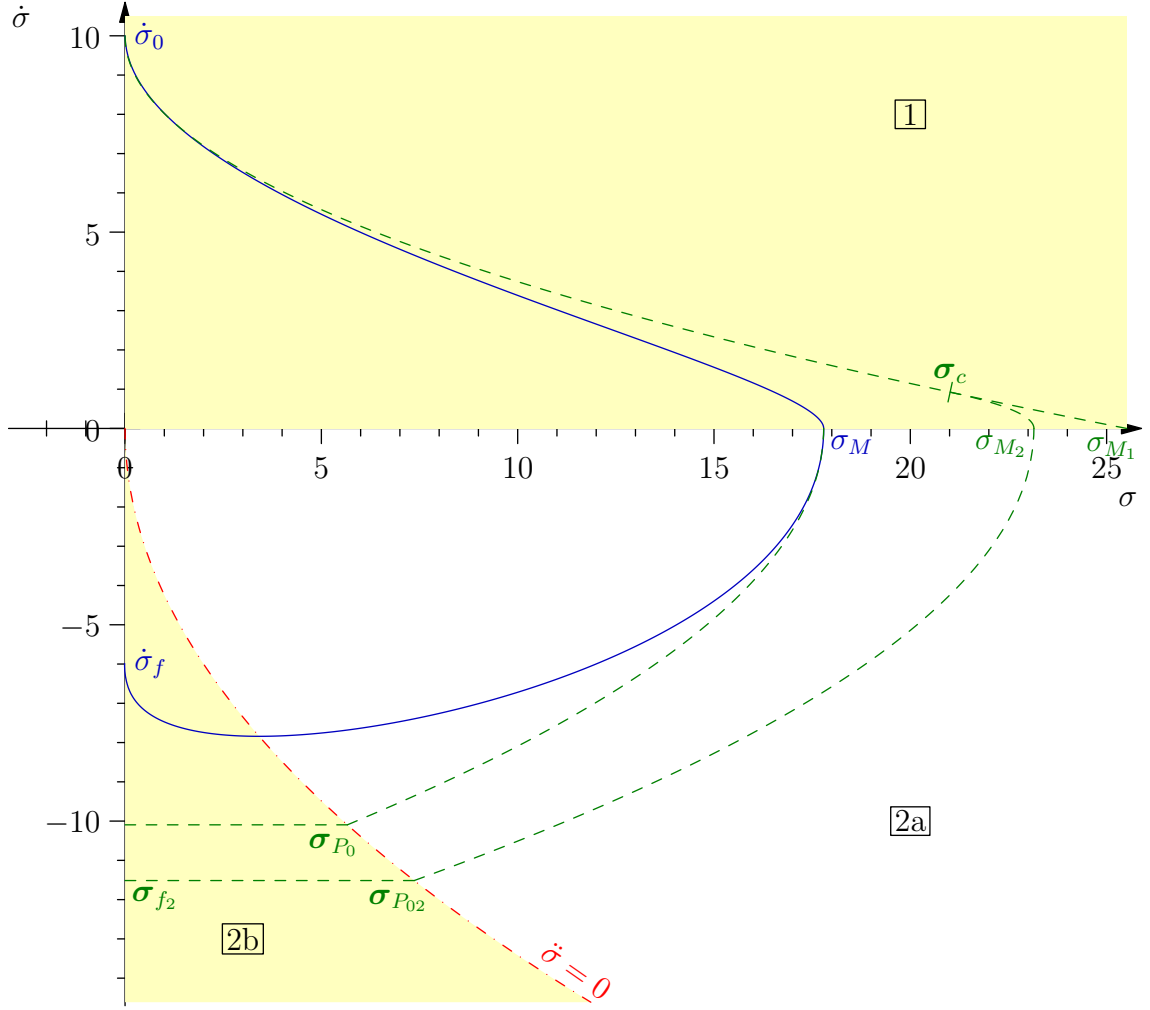


FIG. 3.7 – Trajectoire du *super twisting* (bleu) avec les divisions du demi-plan de phase et quelques majorants (pointillés verts).  
et points particuliers.

*Remarque 3.8.* Cette perturbation est proche de l'opposé de la commande du *twisting*. Cela est logique : si une commande stabilise un système, l'opposé de cette commande le fait diverger.

À ce point de la démonstration, on peut intégrer l'inclusion différentielle (3.12) numériquement avec ces valeurs de  $\alpha$ , pour savoir si le critère du lemme précédent est vérifié ou non pour un jeu de coefficients  $[\lambda_1, \lambda_2]$  donné [Lev98]. On peut aussi intégrer analytiquement une équation simplifiée secteur par secteur qui fournira un majorant de  $\sigma_M$  et finalement de la valeur finale de  $\dot{\sigma}$ . C'est ce qui sera fait ici, affinant le résultat de [DLL05].

### 3.7.4 Premier quadrant

#### Premier majorant

Les Eq. (3.13) peuvent être simplifiées dans ce quadrant par

$$\dot{\sigma} \leq \dot{\sigma}_0 - \lambda_1 \sqrt{\sigma} \quad (3.14)$$

car  $\alpha > 0$ . On néglige ici l'effet du terme  $\alpha = \lambda_2 - 1$ , donc d'une partie de  $\lambda_2 \text{sign}(\sigma)$

Cette trajectoire atteint l'axe des abscisses ( $\dot{\sigma} = 0$ ) à la valeur

$$\sigma_{M_1} = \frac{\dot{\sigma}_0^2}{\lambda_1^2} \quad (3.15)$$

L'inéquation Eq. (3.14) est à variables séparables. Elle peut donc être résolue analytiquement pour  $\dot{\sigma} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}_0 - \lambda_1 \sqrt{\sigma}} &\leq 1 \\ \left[ -2 \frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda_1} - 2 \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda_1^2} \ln(\dot{\sigma}_0 - \lambda_1 \sqrt{\sigma}) \right]_0^\sigma &\leq t \\ -2 \frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda_1} - 2 \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda_1^2} \ln(\dot{\sigma}_0 - \lambda_1 \sqrt{\sigma}) + 2 \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda_1^2} \ln(\dot{\sigma}_0) &\leq t \\ -2 \frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda_1} - 2 \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda_1^2} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_1 \sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}_0} \right) &\leq t \end{aligned}$$

Le temps de convergence de ce majorant est infini. En effet,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \frac{\dot{\sigma}_0^2}{\lambda_1^2}} \left( -2 \frac{\sqrt{\sigma}}{\lambda_1} - 2 \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda_1^2} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_1 \sqrt{\sigma}}{\dot{\sigma}_0} \right) \right) = +\infty.$$

Cela est dû au fait que le terme correctif  $\lambda_1 \sqrt{\sigma}$  tend vers 0 quand  $\sigma$  tend vers 0.

### Second majorant

Une amélioration sur ce premier majorant est de considérer l'effet de  $\alpha \text{sign}(\sigma)$  au lieu de  $\lambda_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma)$  quand le premier seul réduit  $\dot{\sigma}$  davantage que le deuxième seul. À partir des Eq. (3.13b) et Eq. (3.14), le point de la courbe où les effets sont égaux (notre futur point de commutation) correspond à

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_1 \frac{\dot{\sigma}_c}{2\sqrt{\sigma_c}} = \frac{\lambda_1}{2} \left( \frac{\dot{\sigma}_0 - \lambda_1 \sqrt{\sigma_c}}{\sqrt{\sigma_c}} \right) = \lambda_1 \frac{\dot{\sigma}_0}{2\sqrt{\sigma_c}} - \frac{\lambda_1^2}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\sigma_c} &= \frac{\lambda_1 \dot{\sigma}_0}{2} \frac{1}{\frac{\lambda_1^2}{2} + \alpha} = \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda_1 + \frac{2\alpha}{\lambda_1}} \\ \Leftrightarrow \sigma_c &= \frac{\dot{\sigma}_0^2}{\left( \lambda_1 + \frac{2\alpha}{\lambda_1} \right)^2} \end{aligned}$$

Ce résultat et l'Eq. (3.14) donnent

$$\dot{\sigma}_c = \dot{\sigma}_0 - \lambda_1 \sqrt{\sigma_c} = \dot{\sigma}_0 \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{2\alpha}{\lambda_1^2}} \right) = \dot{\sigma}_0 \frac{2\alpha}{\lambda_1^2 + 2\alpha}$$

Ce qui donne la courbe majorante suivante, en choisissant  $t = 0$  au point  $\sigma_c$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\sigma}_c - \alpha t \\ \sigma &= \sigma_c + \dot{\sigma}_c t - \alpha \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_c + \dot{\sigma}_c \frac{\dot{\sigma}_c - \dot{\sigma}}{\alpha} - \frac{(\dot{\sigma}_c - \dot{\sigma})^2}{2\alpha} \\ &= \sigma_c + \frac{\dot{\sigma}_c^2}{2\alpha} - \frac{\dot{\sigma}^2}{2\alpha}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Le point de l'axe des abscisses ( $\dot{\sigma} = 0$ ) a donc pour abscisse,

$$\begin{aligned}\sigma_{M_2} &= \frac{\dot{\sigma}_0^2}{\left(\lambda_1 + \frac{2\alpha}{\lambda_1}\right)^2} + \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\dot{\sigma}_0 2\alpha}{\lambda_1^2 + 2\alpha} \right)^2 \\ &= \frac{\dot{\sigma}_0^2}{\lambda_1^2 + 2\alpha}\end{aligned}$$

Donc dans le pire des cas,  $\alpha = \alpha_1$ , d'où le second majorant de  $\sigma_M$ , d'expression plus complexe, mais moins conservatif que le premier

$$\sigma_{M_2} = \frac{\dot{\sigma}_0^2}{\lambda_1^2 + 2\alpha_1} = \frac{\dot{\sigma}_0^2}{\lambda_1^2 + 2(\lambda_2 - 1)} \quad (3.17)$$

### 3.7.5 Second quadrant

Supposons que le système entame sa traversée du 2<sup>e</sup> quadrant au point  $\begin{bmatrix} \sigma_M \\ 0 \end{bmatrix}$  et au temps  $t = 0$ . L'Eq. (3.13) se simplifie dans ce quadrant par

$$\dot{\sigma} = -\alpha t - \lambda_1 \sqrt{\sigma} \quad (3.18a)$$

$$\ddot{\sigma} = -\alpha - \lambda_1 \frac{\dot{\sigma}}{2\sqrt{\sigma}} \quad (3.18b)$$

ou, en remplaçant  $\dot{\sigma}$  de l'Eq. (3.18a) dans l'Eq. (3.18b),

$$\ddot{\sigma} = -\alpha t - \lambda_1 \sqrt{\sigma} \quad (3.19a)$$

$$\ddot{\sigma} = \alpha \left( \frac{\lambda_1}{2} \frac{t}{\sqrt{\sigma}} - 1 \right) + \frac{\lambda_1^2}{2} \quad (3.19b)$$

Comme  $\dot{\sigma} < 0$ ,  $\sigma$  décroît quand  $t$  croît. On déduit de l'Eq. (3.19b) que  $\ddot{\sigma}$  croît. De plus, d'après l'Eq. (3.18a),  $\dot{\sigma} < 0$ , donc la trajectoire quitte toujours ce quadrant par l'axe des ordonnées ( $\sigma = 0$ ,  $\dot{\sigma} < 0$ ), pas par l'axe des abscisses ( $\sigma > 0$ ,  $\dot{\sigma} = 0$ ). Ce qui prouve que la trajectoire tourne bien autour de l'origine.

### Subdivision en 2 secteurs homogènes

Le point où  $\ddot{\sigma}$  s'annule peut être calculé grâce à l'Eq. (3.18b). Il se trouve sur la parabole  $P_0$  d'équation

$$\frac{|\dot{\sigma}|}{\sqrt{\sigma}} = \frac{2\alpha}{\lambda_1} \quad (P_0)$$

qui divise le quadrant en 2 secteurs homogènes, car cette parabole est un "rayon homogène" suivant les poids de mode glissant d'ordre 2 :

$$\frac{|\kappa \dot{\sigma}|}{\sqrt{\kappa^2 \sigma}} = \frac{|\dot{\sigma}|}{\sqrt{\sigma}} = \frac{2\alpha}{\lambda_1} \quad \forall \kappa > 0$$

Dans le premier secteur, nommé 2a,  $\ddot{\sigma} < 0$  ; dans le second, 2b,  $\ddot{\sigma} > 0$ .

**Dans le secteur 2a**

Comme  $\dot{\sigma} < 0$ , négliger l'effet de  $\lambda_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma)$  dans l'Eq. (3.18b) donne le majorant

$$\ddot{\sigma} < -\alpha \quad (3.20)$$

Ce qui donne la trajectoire majorante

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -\alpha t \\ \sigma &= -\alpha \frac{t^2}{2} + \sigma_M \end{aligned}$$

Soit, sous forme implicite,

$$\dot{\sigma} = -\sqrt{2\alpha(\sigma_M - \sigma)} \quad (3.21)$$

Elle croise la parabole  $P_0$  quand

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{P_0} &= -\frac{2\alpha}{\lambda_1} \sqrt{\sigma_{P_0}} = -\sqrt{2\alpha(\sigma_M - \sigma_{P_0})} \\ \Rightarrow \frac{2\alpha}{\lambda_1^2} \sigma_{P_0} &= \sigma_M - \sigma_{P_0} \\ \Rightarrow \sigma_{P_0} &= \frac{\sigma_M}{1 + \frac{2\alpha}{\lambda_1^2}} \end{aligned}$$

c'est à dire au point  $\sigma_{P_0} = \left[ \frac{\sigma_M}{1 + \frac{2\alpha}{\lambda_1^2}} \quad \sqrt{\frac{2\alpha}{1 + \frac{\lambda_1^2}{2\alpha}}} \sqrt{\sigma_M} \right]^T$

Dans le pire cas,  $\alpha = \alpha_2 = \lambda_2 + 1$ .

**Dans le secteur 2b**

Comme  $\ddot{\sigma} > 0$  dans ce secteur, un majorant très simple est  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{P_0}$ .

**3.7.6 Conclusion de la preuve**

Nous pouvons maintenant connecter les résultats partiels précédents pour avoir 2 majorants possibles en fonction de l'approximation choisie dans le premier quadrant.

La première approximation, passant par  $[\sigma_{M_1}, 0]^T$ , arrive finalement à l'état

$$|\dot{\sigma}_{f_1}| \leq \sqrt{\frac{2\alpha_2}{1 + \frac{\lambda_1^2}{2\alpha_2}}} \sqrt{\sigma_{M_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{1 + \frac{\lambda_1^2}{2\alpha_2}}} \frac{\dot{\sigma}_0}{\lambda_1} \quad (3.22)$$

La condition de stabilité,  $\frac{|\dot{\sigma}_{f_1}|}{\dot{\sigma}_0} \leq 1$ , conduit à

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &\geq \frac{2\alpha_2}{1 + \frac{\lambda_1^2}{2\alpha_2}} \\ \Leftrightarrow \lambda_1^4 + 2\alpha_2 \lambda_1^2 - 4\alpha_2^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow \lambda_1^2 &\geq \frac{-2\alpha_2 + \alpha_2 2\sqrt{5}}{2} = \alpha_2(\sqrt{5} - 1) \\ \Rightarrow \lambda_1 &\geq \lambda_{1_1} = \sqrt{(\lambda_2 + 1)(\sqrt{5} - 1)} \end{aligned}$$



La même condition pour la 2<sup>e</sup> approximation, passant par  $[\sigma_{M_2}, 0]^T$ , s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 + 2\alpha_1 &\geq \frac{2\alpha_2}{1 + \frac{\lambda_1^2}{2\alpha_2}} \\
\Leftrightarrow \lambda_1^4 + (2\alpha_2 + 2\alpha_1)\lambda_1^2 - 4\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 &\geq 0 \\
\Rightarrow \lambda_1^2 &\geq -\alpha_2 - \alpha_1 + \sqrt{5\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2} \\
\Rightarrow \lambda_1^2 &\geq -2\lambda_2 + \sqrt{4\lambda_2^2 + 8\lambda_2 + 8} \\
\Rightarrow \lambda_1 &\geq \lambda_{1_2} = \sqrt{-2\lambda_2 + 2\sqrt{\lambda_2^2 + 2\lambda_2 + 2}}
\end{aligned}$$

Pour un  $\lambda_2 = 1.1$ , on trouve  $\lambda_{1_1} = 1.61$  et  $\lambda_{1_2} = 1.57$ , ce qui est proche de la valeur proposée dans [Lev03],  $\lambda = 1.5$ , mais encore assez éloigné du minimum théorique  $\lambda_1 \approx 1$  obtenu numériquement dans [Lev98]. Mais ce résultat est meilleur d'un ordre de grandeur par rapport à celui de [DLL05].

Il serait possible d'améliorer la preuve en affinant successivement le majorant dans le 2<sup>e</sup> quadrant, mais cela conduirait à des expressions trop complexes pour être exploitées, alors que la preuve de [Lev98] fournit déjà des coefficients minimaux assurant la convergence.

Cette étude du comportement du super twisting montre également le rôle respectif du terme intégral et du terme algébrique  $\lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1)$ . La Rem. 3.7 montre l'intérêt du terme intégral : il compense en théorie la perturbation. Mais en l'absence de perturbation, *c.à.d* si le système est un double intégrateur pur, et si ce terme était seul, la trajectoire obtenue serait cyclique. De plus, dans le pire cas, comme étudié ici, le système bouclé est même instable. On voit donc le rôle joué par le terme algébrique,  $\lambda_1 \sqrt{L} \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1)$ , qui est de stabiliser le système. Il ne pourrait, seul, faire converger le système, mais est indispensable à la stabilité de la boucle fermée, et a un rôle d'atténuateur des oscillations : plus  $\lambda_{2_2}$  est élevé, plus la convergence par demi pseudo-période (correspondant à la trajectoire dans un demi-espace) est rapide.

### 3.8 Conclusion

Ce chapitre a présenté les notions essentielles de la commande par modes glissants d'ordre supérieur. Elle regroupe deux notions distinctes :

- mode glissant *idéal* d'ordre  $n$ , défini par la convergence en temps fini de la sortie *et de ses  $n - 1$  dérivées successives* à 0 exactement en l'absence de *chattering* et
- mode glissant *réel* d'ordre  $n$ , défini par la précision asymptotique en *présence* d'un *chattering* infiniment faible.

Une commande par modes glissants d'ordre supérieur *idéal* peut tout à fait avoir la précision asymptotique d'un mode glissant d'ordre 1 en présence d'erreurs de mesure et d'observation, de même qu'un mode glissant d'ordre 1 peut avoir une précision asymptotique d'ordre supérieur en présence de retards purs de commutation de la commande. Une distinction est également à faire entre d'une part *chattering* dû à un retard pur, qui engendre une imprécision d'ordre  $r$ , où  $r$  est le degré relatif de la sortie considérée par rapport à la commande, qu'elle soit la variable de glissement, la sortie réelle ou toute autre sortie virtuelle, et d'autre part *chattering* dû à une erreur de mesure amplifiée par un observateur ou dérivateur. Une commande par modes glissants ne peut être d'ordre supérieur réel par rapport à une telle cause de *chattering* que par la forme de la surface de

glissement, ou par un changement de la loi de commande forçant le système à atteindre et rester sur la surface de glissement.

La théorie actuelle se fonde essentiellement sur la notion d'homogénéité avec un jeu de poids particulier qui permet entre autres de rendre globale une propriété locale grâce à un changement d'échelle, et de prouver la convergence en temps fini par une simple preuve de convergence asymptotique.

Mais pour mettre en oeuvre une commande par retour d'état, un observateur s'impose si la totalité de l'état n'est pas mesurée. Or, un observateur asymptotique ne permet pas d'assurer la convergence en temps fini de la commande par retour de sortie, c'est à dire du tandem observateur – commande (mais peut permettre de réduire le chattering, comme vu au chapitre précédent). Ces commandes requièrent donc un observateur robuste, convergeant en temps fini et adapté à des signaux dont les dérivées sont discontinues. Les travaux de Kolmogorov redécouverts par Levant renseignent sur la meilleure précision asymptotique atteignable par un dérivateur en temps réel dérivant un signal dont une des dérivées successives est bornée, mais pas forcément continue. Arie Levant a de plus proposé un dérivateur multiple atteignant cette précision asymptotique, et qui converge en temps fini. Le fait que ce dérivateur soit homogène conduit au fait que les commandes par modes glissants homogènes ayant le même degré et les mêmes poids que le dérivateur sont des modes glissants d'ordre supérieur. Le couple dérivateur – commande reste homogène avec les mêmes poids, il converge donc en temps fini moyennant de converger asymptotiquement, ou d'être contractif.

La quatrième partie de ce chapitre a présenté les commandes par modes glissants d'ordre 2 les plus connues. Une preuve originale de convergence pour l'une d'entre elles est également exposée. Même si elle ne permet pas de prouver la convergence pour des coefficients aussi petits que la preuve originelle de Levant, elle est analytique et prouve la convergence pour des valeurs plus faibles que les preuves basées sur les fonctions de Lyapunov.



# Chapitre 4

## Banc d'essais électropneumatique

Ce chapitre présente le banc électropneumatique de l'IRCCyN utilisé pour le test de lois de commande robustes. Sa particularité est d'être constitué de deux vérins pneumatiques identiques mais antagonistes. L'un des vérin, appelé vérin principal, est commandé par la loi de commande à tester. L'autre, appelé vérin perturbateur, exerce une force extérieure indépendante pouvant avoir la même amplitude et une dynamique tout aussi rapide que celle développée par le vérin principal. Ce dernier peut être commandé en monovariable (une entrée de commande et une sortie : la position de la tige) ou multivariable : deux entrées de commande et deux sorties : la position de la tige et la moyenne des pressions dans les chambres.

Cette souplesse dans l'application d'une force extérieure perturbatrice ainsi que dans le choix du problème de commande (mono ou multivariable) alliée à la relative simplicité du modèle de commande font de ce banc une plateforme de choix pour les tests d'observateur ou de lois de commandes robustes.

La première partie de ce chapitre offre une présentation générale du banc d'essai et du simulateur. Une deuxième partie propose un modèle de simulation relativement fin, puis un modèle simplifié destiné à la synthèse d'observateurs ou de lois de commande. La dernière partie présente les prébouclages linéarisants mono- et multivariables.

### 4.1 Présentation du banc d'essais électropneumatique

#### 4.1.1 Partie mécanique

La partie mobile du banc est un chariot guidé par une glissière à billes. Il est mis en mouvement par 2 vérins pneumatiques antagonistes situés de chaque côté du chariot. Les cylindres des vérins sont reliés au bâti, et leurs tiges au chariot, par des liaisons rotules pour supprimer les efforts transversaux dans les vérins.

#### 4.1.2 Vérins

Un vérin pneumatique ou hydraulique est constitué d'un tube cylindrique (le cylindre) et d'une pièce mobile (le piston) qui sépare le volume du cylindre en deux chambres isolées l'une de l'autre. Une différence de pression entre ces deux chambres (et/ou de force due à des ressorts) crée une force s'exerçant sur le piston. Une tige permet de transmettre les efforts et déplacements du piston à l'extérieur du vérin.

Les principales caractéristiques d'un vérin sont :



FIG. 4.1 – Banc d'essais électropneumatiques de l'IRCCyN. À gauche, le vérin principal, au milieu, le chariot mobile, à droite, le vérin de perturbation.

- sa course : la longueur du déplacement maximal. Il dépend entre autres de la longueur du vérin, mais certains dispositifs permettent de l'augmenter à longueur de vérin égale (vérins télescopiques).
- la force maximale développée : elle est le produit de la différence de pression maximale entre les chambres et de la surface utile du vérin :  $F = \Delta P S_u$ . La surface utile est la surface sur laquelle le fluide exerce une pression. Elle n'est pas toujours égale à la section intérieure du cylindre, car on doit souvent retrancher la section de la tige, sur laquelle la pression du fluide ne s'exerce pas.

Il existe de nombreux types de vérins. On peut classer les principaux selon 2 critères. Le premier est la transmission des efforts et déplacements (la tige) :

**simple tige** : la tige ne sort que d'un côté du vérin. Ce vérin est peu coûteux, car l'étanchéité dynamique ne doit être réalisée que d'un côté. Il est aussi simple à mettre en œuvre, car un seul côté du vérin est mobile. Par contre, le comportement du vérin n'est pas symétrique, car la surface utile n'est pas la même des deux côtés (d'un côté, elle est réduite de la section de la tige, de l'autre, non). De plus, il faut veiller à éviter les couples ou efforts transversaux sur le vérin, car cela engendre des efforts importants au niveau du disque intérieur du piston et peut donc engendrer une usure prématurée des joints intérieurs.

**double tige** : la tige traverse le vérin et sort des deux côtés. Cette disposition est légèrement plus coûteuse que la précédente à cause de l'étanchéité dynamique, et nécessite de gérer la course de la tige du côté non utilisé. Cela requiert parfois un carter, pour des raisons de sécurité. Par contre, le comportement du vérin est symétrique, et des efforts transversaux plus importants sont tolérables, car pris en compte au niveau des paliers, pas du disque intérieur.

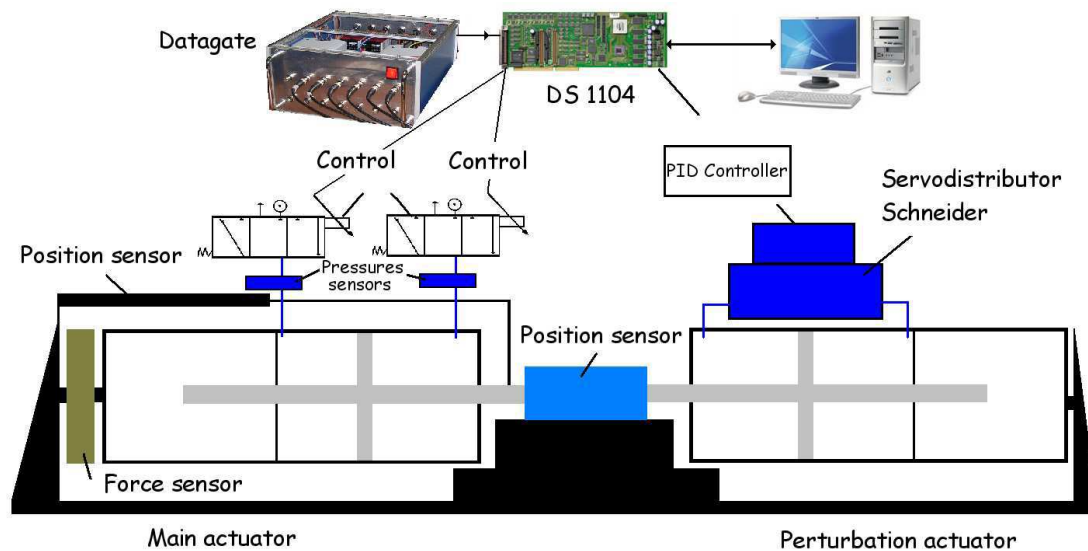


FIG. 4.2 – Schéma du banc d'essais électropneumatiques de l'IRCCyN

**sans tige** : le piston glisse dans un profilé ayant une fente sur toute la longueur. Le profilé est fermé par une bande d'étanchéité souple. Ce type de vérin n'existe que pour des vérins pneumatiques, car la pression dans les vérins hydrauliques serait trop forte.

Le second critère est le nombre de chambres sous pression :

**vérin double effet** : Les deux chambres sont sous pression, la force développée dépend de la différence de pression entre les chambres.

**vérin simple effet** : Le fluide n'est injecté que dans une seule chambre. Un ressort remplace la pression du fluide dans l'autre chambre.

Il existe aussi une grande variété de vérins spéciaux adaptés à différents cas particuliers. Le principe de commande reste sensiblement le même que celui des vérins classiques, même si le modèle est légèrement différent.

Les vérins choisis pour le banc d'essai sont :

**identiques** : pour permettre de générer n'importe quelle force perturbatrice jusqu'à la même amplitude et la même dynamique que celle développée par le vérin. Cela permet de tester les lois de commande dans des situations extrêmes.

**à double tige** : ce qui simplifie le modèle, car le système est symétrique.

**à double effet** : donc ayant deux entrées de commande : l'injection d'air dans chacune des chambres. Cela permet d'implémenter des lois de commandes à deux entrées.

Ils ont une course de 75mm, un diamètre intérieur de 80 mm, un diamètre de tige de 25 mm. Comme la pression d'alimentation est de 7 bar et que la pression atmosphérique est de 1 bar, l'effort maximal développé par un vérin est de 31 kN.

### 4.1.3 Servodistributeurs

Le contrôle de l'admission de fluide sous pression et de l'échappement (à basse pression) d'une chambre d'un vérin hydraulique ou pneumatique est réalisé par un distributeur. Il est composé d'une pièce mobile, le tiroir, coulissant dans un corps fixe, la chemise. La position du tiroir détermine quels orifices sont en communication. Les distributeurs

classiques sont conçus pour fonctionner en tout ou rien : les orifices sont pleinement connectés ou complètement bloqués. Ils ne permettent pas de réguler le débit. Il existe aussi des distributeurs *progressifs* ou *proportionnels*, souvent appelés *servodistributeurs*. Ils assurent une ouverture des orifices où circule l'air proportionnelle à l'entrée de commande, ce qui permet de contrôler finement le débit.

On distingue les distributeurs suivant

- leur nombre d'orifices, *c.à.d* du nombre de conduites sortant du corps du distributeur,
- le nombre de positions, *c.à.d* le nombre de situations possibles dans lesquelles il peut se trouver.

Le vérin principal est commandé par 2 servodistributeurs 3/3 proportionnels Servotronic de la société Joucomatic, chacun contrôlant le débit d'air dans chaque chambre. Ils ont 3 orifices :

- l'admission d'air sous pression (7 bar),
- l'échappement de l'air à la pression ambiante,
- l'utilisation, connectée à une chambre du vérin,

et 3 positions :

- chambre connectée à l'admission,
- chambre non connectée,
- chambre connectée à l'échappement.

Comme ils ne contrôlent qu'un seul débit d'air, ces distributeurs sont souvent appelés servovalves.

Commander le débit d'air dans chaque chambre indépendamment permet de mettre en place soit une commande multivariable, à 2 entrées de commande, soit une commande monovariable, en pilotant une servovalve par un signal opposé à l'autre : quand l'air est admis dans une chambre, il s'échappe de l'autre.

Le vérin de perturbation est commandé par un servodistributeur 5/3 proportionnel de la société Schneider. Il a 5 orifices : 1 admission, 2 échappements, et 2 utilisations (connectées aux chambres du vérin) ; et 3 positions : chambres non connectées, admission dans une chambre, échappement dans l'autre et vice versa.

Ce distributeur permet de commander le vérin secondaire par une simple commande monovariable. On peut également commander le vérin principal de la même manière, en monovariable, mais cela nécessite dans ce cas d'envoyer à une servovalve l'opposé de la commande de l'autre.

#### 4.1.4 Capteurs, calculateur, simulation

Les capteurs sont au nombre de 5 :

- le capteur de position du chariot mobile est un LVDT.
- les capteurs de pression pour chaque chambre du vérin.
- le capteur de force, monté en série avec le vérin.
- le capteur de pression d'alimentation pour vérifier que la pression d'alimentation est bien de 7 bar et ne varie pas trop.

Une carte DSpace reçoit les signaux issus des capteurs, calcule les commandes du vérin principal, les envoie aux servovalves, et envoie la consigne d'effort au régulateur PID analogique contrôlant le servodistributeur du vérin de perturbation. Cette carte est pilotée par un PC grâce à Matlab/Simulink/Real Time Workshop et ControlDesk.

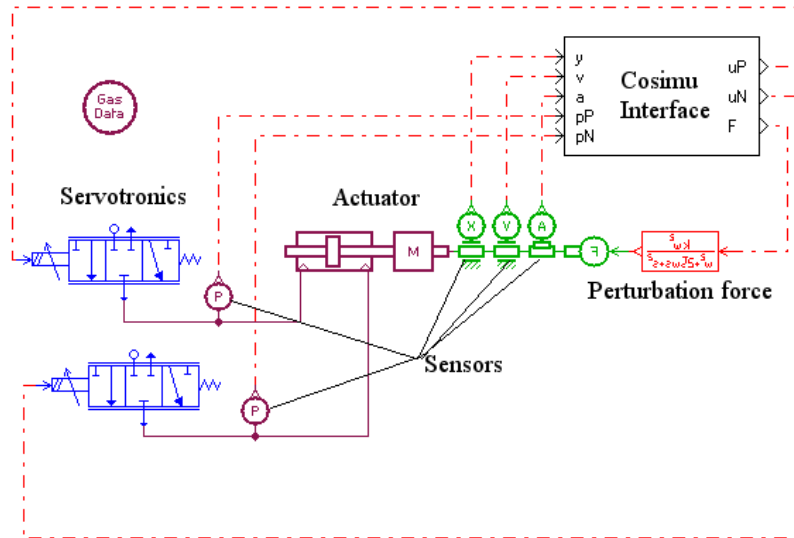


FIG. 4.3 – Modèle AMESim du banc d'essais

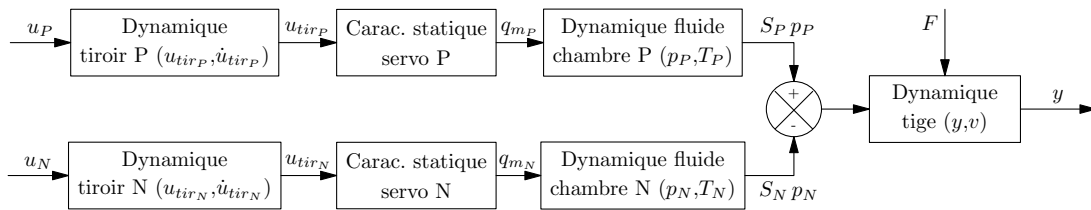


FIG. 4.4 – Modèle de simulation (complet) du banc d'essais électropneumatique de l'IRC-CyN

Tout observateur ou loi de commande est préalablement validé en simulation. Pour ce faire, un modèle du banc d'essai a été réalisé sous le logiciel AMESim, spécialisé dans la simulation des systèmes monodimensionnels, notamment les systèmes à fluide sous pression, suivant un principe d'échange de puissance entre les divers composants du système.

L'observateur ou la loi de commande à tester est implémenté sous Matlab/Simulink, et simulé par cosimulation avec le logiciel AMESim. La cosimulation consiste à connecter plusieurs logiciels, chacun responsable d'une partie de la simulation, pour simuler un système composé de parties différentes requérant chacune un outil de simulation adapté. Concrètement, cela signifie que Simulink envoie les commandes à AMESim, qui simule le système sur un pas de temps et envoie les résultats à Simulink pour simuler l'information reçue des capteurs. Du point de vue de l'utilisateur, la cosimulation est gérée dans Simulink par un bloc simulant le système. Ce bloc ayant exactement les mêmes entrées et sorties que le bloc représentant les entrées et sorties de la carte DSpace, l'implémentation de l'observateur ou de la loi de commande pour la simulation est réutilisable sans aucune modification sur le banc d'essai réel.



## 4.2 Modèle de simulation

Le but de cette section est de présenter d'abord un modèle aussi complet que possible, pour que les simulations soient les plus précises possibles. Il sera ensuite simplifié pour en extraire un modèle destiné à la synthèse d'observateurs ou de lois de commande.

Les principales grandeurs physiques qui interviennent dans la dynamique du banc sont :

- $y$  : la position du chariot mobile, donc de la tige des vérins.
- $v : \dot{y}$ , la vitesse du chariot mobile.
- $p_P$  et  $p_N$  : les pressions dans les 2 chambres P et N du vérin principal. La chambre P correspond à la chambre qui, mise sous pression, engendre un mouvement *Positif* du chariot suivant l'axe  $y$ , et la chambre N, un mouvement *Négatif*.
- $F_f$  : les forces de frottement à l'œuvre dans le vérin (frottements secs et visqueux)
- $F$  : la force perturbatrice
- $T_P$  et  $T_N$  : les températures dans les chambres P et N du vérin principal.

Comme on ne cherche à commander que le vérin principal soumis à un effort extérieur quelconque, le modèle du vérin de perturbation ne sera pas détaillé. On le considère comme une boîte noire fournissant un effort  $F$ .

### 4.2.1 Partie mécanique

Le modèle de la partie mécanique s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie mobile : la classe d'équivalence du chariot mobile, *c.à.d* le chariot et les pistons des deux vérins.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} (S_P p_P - S_N p_N - F_f - F) \\ \frac{dy}{dt} &= v \end{aligned} \tag{4.1}$$

où  $M$  est la masse en mouvement, soit celle du chariot et des 2 tiges,  $S_P$  est la surface utile du piston pour la chambre P, et  $S_N$ , celle pour la chambre N.  $F_f$  est la force de frottement. Elle est composée de frottements visqueux et de frottements secs. Le frottement visqueux est fonction linéaire de la vitesse :  $bv$ , avec  $b$  le coefficient de frottement visqueux, Le frottement sec, par contre, est un phénomène complexe et pas toujours bien répétable, pouvant être modélisé de plusieurs manières différentes. Le modèle choisi pour la simulation est celui proposé par le logiciel AMESim, qui se base sur les travaux de [ADC94, Kar85]. Le frottement sec est représenté par :

$$F_{sec} = \begin{cases} F_S \text{sign}(v) & \text{si } |v| < \delta_{vit} \\ F_C + (F_S - F_C) e^{-\frac{|v - \delta_{vit}|}{c}} \text{sign}(v) & \text{si } |v| > \delta_{vit} \end{cases} \tag{4.2}$$

où  $F_S$  est le frottement sec pour une vitesse faible et  $F_C < F_S$ , le frottement sec pour un mouvement relatif assez grand.  $\delta_{vit}$  généralement faible permet de prendre en compte le fait qu'un frottement d'une vitesse faible (inférieure à  $\delta_{vit}$ ) est quasiment identique à celui d'une vitesse nulle, et  $c$  est le coefficient fixant la transition entre vitesse faible et vitesse rapide. Ce modèle représente l'effet Stribeck, *c.à.d* le fait que la force de frottement est plus élevée au repos qu'en présence d'un mouvement relatif entre les 2 surfaces en contact.

Pour déterminer complètement la dynamique de la tige, il faut aussi connaître la pression dans chacune des chambres du vérin principal.

### 4.2.2 Vérin

Un vérin est composé de 2 chambres à volumes variables en fonction de la position du piston. L'effort développé par le vérin dépend des pressions du gaz dans ces chambres, dont l'évolution relève de la thermodynamique. Ses équations permettront de dériver un premier modèle complet, mais comportant beaucoup de paramètres difficiles à déterminer. Un deuxième modèle, plus simple, exploitera des hypothèses simplificatrices classiques. L'étude est faite sous les hypothèses classiques :

- l'air est un gaz parfait,
- l'énergie cinétique du gaz est négligeable dans la chambre,
- l'écoulement s'effectue sans échange de chaleur ou de travail avec l'extérieur,
- l'échange de travail avec le piston est réversible,
- les conduites d'alimentation et d'échappement sont à la même hauteur, la gravité n'a aucune influence.

On suppose également que les variables de pression et de température sont homogènes dans la chambre, ce qui n'est pas tout à fait vrai lors de transitoires rapides.

La pression du gaz dans une chambre, connaissant son volume, est reliée à la masse de gaz présente dans la chambre et à sa température par la loi des gaz parfaits

$$pV = mrT$$

où  $r$  est la constante des gaz parfaits par unité de masse. Il faut donc connaître l'évolution de la masse de gaz et de sa température.

L'équation de conservation de la masse indique que la variation de la masse du gaz à l'intérieur de la chambre à volume variable  $V$  est égale à la différence de débit massique  $q_{m^{in}}$  entrant et  $q_{m^{out}}$  sortant.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{in}}{dt} - \frac{dm_{out}}{dt} = q_{m^{in}} - q_{m^{out}} \quad (4.3)$$

La température, quant à elle, est reliée à l'énergie interne du gaz  $E$  par

$$E = mc_v T$$

où  $c_v$  est la capacité thermique volumique du gaz.

Or, la variation d'énergie interne  $dE$  du gaz contenu dans la chambre s'obtient par le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système ouvert

$$dE = h_{in} dm_{in} - h_{out} dm_{out} + \delta W + \delta Q \quad (4.4)$$

où

- $\delta W$  est le travail mécanique fourni au gaz. S'il y a réversibilité mécanique, il devient

$$\delta W = -p dv$$

- $h_{in}$  est l'enthalpie massique du flux de matière entrant. Il est donné par

$$h_{in} = c_p T_s \quad (4.5)$$

où  $c_p$  est la capacité thermique massique et  $T_s$  la température de la source, typiquement la température ambiante.

–  $h_{out}$  est l'enthalpie massique du flux de matière sortant. Il est donné par

$$h_{out} = c_p T$$

où  $T$  est la température du gaz dans la chambre.

–  $\delta Q$  est la chaleur fournie au gaz.

De plus, les propriétés thermodynamiques données par la loi de Mayer pour un gaz parfait indiquent que

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$$

où  $c_v$  est la capacité thermique volumique.

En s'intéressant non pas à la variation d'énergie interne  $dE$  mais à sa variation  $\frac{dE}{dt}$  et en utilisant toutes les relations précédentes, les équations Eq. (4.4) et Eq. (4.3) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -(\gamma - 1) \frac{T}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{rT}{pV} (\gamma T_s - T) q_{m^{in}} - \frac{rT^2}{pV} (\gamma - 1) q_{m^{out}} + (\gamma - 1) \frac{T}{pV} \frac{\delta Q}{dt} \\ \frac{dp}{dt} &= -\gamma \frac{p}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{\gamma rT}{V} q_{m^{in}} - \frac{\gamma rT}{V} q_{m^{out}} - \frac{(\gamma - 1)}{V} \frac{\delta Q}{dt} \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'équation différentielle de la température est d'une part très complexe, et d'autre part dépend d'un terme d'échange de chaleur difficile à déterminer. Le modèle le plus courant est :

$$\frac{\delta Q}{dt} = S_e \lambda (T_s - T) \quad (4.7)$$

où  $S_e$  est la surface d'échange (la paroi externe du cylindre) et  $\lambda$  le coefficient de transfert thermique dépendant de :

- la convection entre le gaz et la paroi interne du cylindre,
- de la conduction entre la paroi interne et la paroi externe du cylindre,
- de la convection entre la paroi externe et l'air ambiant.

Ce coefficient est en général déterminé expérimentalement, et peut avoir une expression complexe, voire dépendante du temps si l'on prend une modélisation fine.

Si l'on suppose une relation entre la température et la pression, on peut écrire un modèle simplifié. Pour cela, on adopte classiquement une loi *polytropique*  $T^k p^{1-k} = \text{constante}$  où le coefficient  $k$  est déterminé expérimentalement. Le cas  $k = 1$  correspond à une transformation isotherme (à température constante) réversible, et  $k = \gamma$  à une transformation adiabatique (sans échange de chaleur avec l'extérieur) réversible. Comme la transformation est globalement une détente (le gaz, initialement à 7 bar, se retrouve après un certain temps relâché dans l'air ambiant)  $k$  sera choisi inférieur à  $\gamma$ . De plus, la dynamique du fluide est très rapide devant la dynamique de la température, on considère donc souvent que la transformation est proche de l'adiabatique. Si les mouvements imposés étaient extrêmement lents, les échanges thermiques imposeraient une température constante égale à la température atmosphérique, en d'autres termes, une transformation isotherme. Une transformation réelle se situe donc entre l'adiabatique et l'isotherme, donc  $1 < k < \gamma$ . Cette loi polytropique permet en outre de modéliser l'irréversibilité d'une manière facile à exploiter. Cette irréversibilité dans la dynamique de la pression est due au

terme d'échange de chaleur  $\frac{\delta Q}{dt}$ , qui est directement pris en compte par la loi polytropique. Le modèle devient donc

$$\begin{aligned} T^k p^{1-k} &= T_0^k p_0^{1-k} \\ \frac{dp}{dt} &= -k \frac{p}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{krT}{V} (q_{m^{in}} - q_{m^{out}}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Le débit massique dépend de la commande, mais de manière non linéaire, à cause des servodistributeurs.

### 4.2.3 Servodistributeurs

Les servovalves sont modélisées en deux parties :

- Une caractéristique statique donnant le débit massique en fonction de la position (fixe) du tiroir et de la pression à l'orifice d'utilisation (donc dans la chambre du vérin).
- Une caractéristique dynamique reproduisant la dynamique du tiroir commandé par la loi de commande interne de la servovalve.

La caractéristique statique est non linéaire et incertaine. Le modèle le plus précis est un ensemble de points de mesures obtenus en régime statique. Ces points ont été interpolés par des fonctions polynomiales affines en la commande.

$$q_m(u_{tir}, p) = \phi(p) + \psi(p, \text{sign}(u_{tir})) u_{tir} \quad (4.9)$$

où  $u_{tir}$  est la position du tiroir (si la dynamique du tiroir était instantanée,  $u_{tir}$  serait égal à la tension de commande  $u$ ),  $p$  la pression en sortie de la servovalve (pour nous, la chambre du vérin),  $\phi(P)$  est le débit de fuite et  $\psi(P, \text{sign}(u_{tir}))$  le débit "utile". Il est différent à l'échappement ( $u_{tir} < 0$ ) et à l'admission ( $u_{tir} > 0$ ), c'est pourquoi 2 polynômes d'interpolation différents sont utilisés en fonction du signe de la commande.

La caractéristique dynamique a été identifiée expérimentalement comme un système linéaire du 2<sup>e</sup> ordre :

$$\frac{d^2 u_{tir}}{dt^2} + 2\zeta \frac{du_{tir}}{dt} + \omega_0 = u \quad (4.10)$$

Sa pulsation propre est  $\omega_0 = 942 \text{ rad/s}$  et son coefficient d'amortissement  $\zeta = 0.7$ .

### 4.2.4 Modèle de simulation

Le modèle complet du banc simulé par AMESim reprend donc les équations mécaniques Eq. (4.1) et Eq. (4.2), thermodynamiques Eq. (4.6) et Eq. (4.7), et les caractéristiques statique et dynamique des servovalves. il est schématisé par la Fig. 4.4.

La dynamique de chaque tiroir ( $x = P$  et  $x = N$ ) est donnée par l'Eq. (4.10)

$$\frac{d^2 u_{tir_x}}{dt^2} + 2\zeta \frac{du_{tir_x}}{dt} + \omega_0 = u_x$$

et sa caractéristique statique est fournie par interpolation du tableau de points expérimentaux.

Les dynamiques du fluide et des parties mécaniques du vérin sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{dT_P}{dt} &= -(\gamma - 1) \frac{T_P}{V_P(y)} \frac{dV_P(y)}{dt} + \frac{rT_P^2}{p_P V_P(y)} (\gamma - 1) q_{m^P}(u_{tir_P}, p_P) + (\gamma - 1) \frac{T_P}{p_P V_P(y)} \frac{\delta Q_P}{dt} \\
\frac{dp_P}{dt} &= -\gamma \frac{p_P}{V_P(y)} \frac{dV_P(y)}{dt} + \frac{\gamma r T_P}{V_P(y)} q_{m^P}(u_{tir_P}, p_P) - \frac{(\gamma - 1)}{V_P(y)} \frac{\delta Q_P}{dt} \\
\frac{dT_N}{dt} &= -(\gamma - 1) \frac{T_N}{V_N(y)} \frac{dV_N(y)}{dt} + \frac{rT_N^2}{p_N V_N(y)} (\gamma - 1) q_{m^N}(u_{tir_N}, p_N) + (\gamma - 1) \frac{T_N}{p_N V_N(y)} \frac{\delta Q_N}{dt} \\
\frac{dp_N}{dt} &= -\gamma \frac{p_N}{V_N(y)} \frac{dV_N(y)}{dt} + \frac{\gamma r T_N}{V_N(y)} q_{m^N}(u_{tir_N}, p_N) - \frac{(\gamma - 1)}{V_N(y)} \frac{\delta Q_N}{dt} \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} (S_P p_P - S_N p_N - F_f - F) \\
\frac{dy}{dt} &= v
\end{aligned} \tag{4.11}$$

avec :

- Le volume des chambres,  $V_0$  étant le volume de chaque chambre pour le piston en position centrale :

$$\begin{aligned}
V_P(y) &= V_0 + S_P y \\
V_N(y) &= V_0 - S_N y
\end{aligned}$$

- L'échange thermique :  $\frac{\delta Q_x}{dt} = S_e^x \lambda (T_s - T_x)$

Ce modèle complet est donc d'ordre 10, et présente des dynamiques rapides (tiroir des servovalves) comme lentes (piston), ainsi que des termes incertains : caractéristique statique de la servovalve, frottements, ..., et une force extérieure inconnue. Même s'il est utile pour la simulation, il est beaucoup trop complexe pour la synthèse d'observateurs ou de lois de commande.

### 4.2.5 Modèle simplifié

Pour obtenir un modèle d'ordre réduit, plusieurs simplifications sont faites :

- La dynamique des servovalves est négligée, car très rapide par rapport à celle de la pression dans les chambres ou celle du piston. La caractéristique statique est conservée, mais on utilise les polynômes d'interpolation au lieu des points de mesure.
- La dynamique de la température est négligée. On suppose que la température du vérin est la même que la température ambiante.

Cela donne finalement un modèle du 4<sup>e</sup> ordre

$$\begin{aligned}
\dot{p}_P &= \frac{krT}{V_P(y)} [\phi_P(p_P) + \psi_P(p_P, \text{sign}(u_P))u_P - \frac{S}{rT} p_P v] \\
\dot{p}_N &= \frac{krT}{V_N(y)} [\phi_N(p_N) + \psi_N(p_N, \text{sign}(u_N))u_N + \frac{S}{rT} p_N v] \\
\dot{v} &= \frac{1}{M} [S(p_P - p_N) - F_f - F] \\
\dot{y} &= v
\end{aligned}$$

où  $S = S_P = S_N$  est la surface utile du vérin, égale pour les deux chambres, car le vérin est à double tige.

Ce modèle est affine en la commande. Autrement dit, il peut se mettre sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4.12)$$

En effet,

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_P \\ \dot{p}_N \\ \dot{v} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{krT}{V_P(y)}[\phi_P(p_P) - \frac{S}{rT}p_P v] \\ \frac{krT}{V_N(y)}[\phi_N(p_N) + \frac{S}{rT}p_N v] \\ \frac{1}{M}[S(p_P - p_N) - F_f - F] \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{krT}{V_P(y)}\psi_P(p_P, \text{sign}(u_P)) & 0 \\ 0 & \frac{krT}{V_P(y)}\psi_N(p_N, \text{sign}(u_N)) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_P \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

#### 4.2.6 Valeurs des paramètres

Les valeurs des paramètres sont :

- Masse :  $M = 3.4 \text{ kg}$
- Section utile :  $S_P = S_N = 0.0045 \text{ m}^2$
- Volume d'une chambre, piston en position centrale :  $V_0 = 3.40.10^{-4} \text{ m}^3$
- Constante des gaz parfaits :  $r = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
- Température ambiante :  $T = 293 \text{ °K} = 20 \text{ °C}$
- Coefficient polytropique :  $k = 1.2$

### 4.3 Commande mono et multivariable

Le vecteur d'état du modèle est de dimension 4 :  $\mathbf{x} = [p_P, p_N, v, y]^T$ . La position du chariot est de degré relatif 3 par rapport aux entrées de commande  $u_P$  et  $u_N$ , et chaque pression, de degré relatif 1 par rapport à ces mêmes entrées.

La grandeur que l'on souhaite principalement contrôler est la position du chariot (donc de la tige du vérin)  $y$ . Il est possible de le faire par une commande monovariable, en prenant l'entrée de commande  $u = u_P = -u_N$ , c'est à dire d'envoyer à une servovalve un signal opposé à l'autre. Ce faisant, il reste une dynamique des zéros correspondant à l'évolution des pressions. Il n'a pas été démontré formellement que cette dynamique est globalement stable. Mais, d'une part, il est prouvé qu'elle est localement asymptotiquement stable, et d'autre part, un raisonnement physique permet de se persuader de la stabilité globale. En effet, la pression est physiquement positive, et chacune des chambres est alimentée par de l'air comprimé à 7 bar. La seule manière de dépasser cette pression dans une chambre est de comprimer l'air par le biais du piston. La pression maximale atteignable dans une

chambre est donc limitée par la force extérieure maximale pouvant agir sur le piston qui, dans un fonctionnement normal, ne dépasse pas la force développée par le vérin<sup>1</sup>.

On peut aussi souhaiter contrôler cette dynamique des zéros, c'est à dire la pression dans les chambres. Une sortie possible pour ce faire est la pression dans une des chambres. Une autre possibilité est de contrôler la moyenne des pressions dans les deux chambres. Ce choix a l'avantage d'être orthogonal à la différence des pressions, donc de ne pas influencer directement sur la dynamique de la vitesse. La moyenne des pressions n'influe sur cette dynamique qu'au deuxième ordre, celle de l'accélération (ou de la différence des pressions, ce qui revient au même), à cause de la dépendance de la caractéristique statique des servovalves par rapport à la pression. Utiliser cette sortie permet donc d'avoir le meilleur découplage entre les deux dynamiques commandées : tout autre choix (non colinéaire) influencerait directement la dynamique de la vitesse.

Contrôler la moyenne des pressions en plus de la position permet différentes choses :

- s'assurer que le système reste près d'un point de fonctionnement spécifié en position comme en pression, ou que les pressions restent dans une certaine limite.
- contrôler la raideur pneumatique. Si l'on ferme les deux servovalves puisque l'on déplace le piston hors de sa position d'équilibre, une chambre sera en surpression et l'autre en dépression, ce qui crée une force s'opposant au déplacement, à la manière d'un ressort : c'est la raideur pneumatique. Elle peut permettre par exemple de réduire l'erreur de positionnement face à une force extérieure brusque avant que la commande ne réagisse. Plus la moyenne des pressions dans les chambres est élevée<sup>2</sup>, plus cette raideur est forte.
- réduire la consommation de fluide. L'effort développé par le vérin ne dépend que de la différence de pression. Réduire la moyenne des pressions permet de réduire la quantité d'air comprimé demandée par le vérin<sup>3</sup>. Comme l'énergie fournie par la source, donc consommée par le vérin, est  $m_{in}c_pT_s$  (Eq. (4.4) et Eq. (4.5)), réduire la masse d'air consommée par le vérin permet globalement de réduire la consommation d'énergie, donc d'augmenter le rendement.

### 4.3.1 Découplage linéarisant multivariable

Pour mettre en place une commande par modes glissants multivariables, le plus simple est de découpler le système. Cette opération permet en outre de le linéariser en une chaîne d'intégrateurs purs. Si on utilise une commande par modes glissants d'ordre 1, cela permet de réduire le chattering en ajoutant à la commande discontinue la commande nominale (§2.2.1), *c.à.d.* une commande linéaire ayant les mêmes pôles que la surface de glissement plus un intégrateur pur.

On considère le problème de suivi de trajectoire en position (désirée)  $y_d$  et moyenne des pressions (désirée)  $p_d$ . Les sorties considérées sont donc  $\sigma_1 = y - y_d$  et  $\sigma_2 = \frac{p_P + p_N}{2} - p_d$ . La position  $\sigma_1$  est de degré relatif 3 par rapport aux deux entrées physiques  $\mathbf{u} = [u_P, u_N]^T$ , et la moyenne des pressions  $\sigma_2$  est de degré relatif 1 par rapport à ces mêmes entrées. Le

<sup>1</sup>Pour une utilisation industrielle privilégiant la durée de vie, on évite même d'utiliser un vérin sous une force supérieure à la moitié de l'effort maximal.

<sup>2</sup>La différence des pressions dépend de la force extérieure au point d'équilibre

<sup>3</sup>Par la loi des gaz parfaits, à volume et température donnés, la quantité de gaz est proportionnelle à la pression.

système peut donc être mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^{(3)} \\ \dot{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \chi(\mathbf{x}) + \Gamma(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

avec

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_f^3 h_1 - y_d^{(3)} \\ L_f h_2 - \dot{p}_d \end{bmatrix}$$

et

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1 & L_{g_2} L_f^2 h_1 \\ L_{g_1} h_2 & L_{g_2} h_2 \end{bmatrix}$$

La commande découplante linéarisante  $\mathbf{u}$  s'écrit alors

$$\mathbf{u} = \Gamma^{-1}(-\chi + \mathbf{v}) \quad (4.14)$$

avec  $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^T$  la commande du système découplé,  $v_1$  contrôlant la dynamique du piston,  $v_2$  celle de la moyenne des pressions.

Les termes des matrices sont :

$$\begin{aligned} L_f^3 h_1 &= \frac{krTS}{M} \left( \frac{\phi(p_P)}{V_P(y)} - \frac{\phi(p_N)}{V_N(y)} \right) - \frac{kS^2 v}{M} \left( \frac{p_P}{V_P(y)} + \frac{p_N}{V_N(y)} \right) \\ L_f h_2 &= \frac{krT}{2} \left( \frac{\phi(p_P)}{V_P(y)} + \frac{\phi(p_N)}{V_N(y)} \right) + \frac{kSv}{2} \left( -\frac{p_P}{V_P(y)} + \frac{p_N}{V_N(y)} \right) \\ L_{g_1} L_f^2 h_1 &= \frac{krTS}{M} \frac{\psi(p_P, \text{sign}(u_P))}{V_P(y)} \\ L_{g_2} L_f^2 h_1 &= -\frac{krTS}{M} \frac{\psi(p_N, \text{sign}(u_N))}{V_N(y)} \\ L_{g_1} h_2 &= \frac{krT}{2} \frac{\psi(p_P, \text{sign}(u_P))}{V_P(y)} \\ L_{g_2} h_2 &= \frac{krT}{2} \frac{\psi(p_N, \text{sign}(u_N))}{V_N(y)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pour calculer l'inverse de  $\Gamma(x)$ , il faut connaître son déterminant

$$\begin{aligned} \det(\Gamma) &= L_{g_1} L_f^2 h_1 \cdot L_{g_2} h_2 - L_{g_2} L_f^2 h_1 \cdot L_{g_1} h_2 \\ &= \frac{(krT)^2 S}{2M} \frac{\psi(p_P, \text{sign}(u_P))}{V_P(y)} \frac{\psi(p_N, \text{sign}(u_N))}{V_N(y)} \\ &= \frac{S}{M} (2L_{g_1} h_2)(2L_{g_2} h_2) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(x) &= \frac{1}{\det(\Gamma)} \begin{bmatrix} L_{g_2} h_2 & -L_{g_2} L_f^2 h_1 \\ -L_{g_1} h_2 & L_{g_1} L_f^2 h_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{M}{S}}{2L_{g_1} h_2} & \frac{1}{2L_{g_1} h_2} \\ -\frac{\frac{M}{S}}{2L_{g_2} h_2} & \frac{1}{2L_{g_2} h_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Ce qui donne finalement la commande découplante linéarisante

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L_{g_1}h_2} \left( \frac{M}{S}(v_1 - L_f^3h_1 + y_d^{(3)}) + (v_2 - (L_fh_2 - \dot{p}_d)) \right) \\ \frac{1}{2L_{g_2}h_2} \left( -\frac{M}{S}(v_1 - L_f^3h_1 + y_d^{(3)}) + (v_2 - (L_fh_2 - \dot{p}_d)) \right) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

### 4.3.2 Linéarisation monovariante

Un prébouclage linéarisant monovariante, pour une commande ne devant assurer qu'un suivi de trajectoire en position par une seule entrée de commande, se déduit du cas précédent. La sortie commandée est  $\sigma_1$ , l'entrée de commande,  $v_1$ . La commande est donc

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{1}{2L_{g_1}h_2} \frac{M}{S} (v_1 - L_f^3h_1 + y_d^{(3)}) \\ u_N &= -\frac{1}{2L_{g_2}h_2} \frac{M}{S} (v_1 - L_f^3h_1 + y_d^{(3)}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

## 4.4 Conclusion

Le banc d'essais électropneumatique de l'IRCCyN est donc un système non linéaire incertain, présentant des dynamiques rapides à négliger lors de la synthèse d'observateurs ou de lois de commande et pouvant être soumis à une perturbation extérieure rapide et de forte amplitude. Les deux entrées de commande pouvant être liées et les deux sorties possibles, position du chariot et moyenne des pressions dans les deux chambres du vérin (optionnelle), permettent de considérer le système comme monovariante avec une dynamique de zéros stable, ou multivariante, avec différents degrés relatifs. Il permet donc de tester des observateurs ou lois de commandes non linéaires robustes, mono ou multivariantes, en ne devant se familiariser qu'avec un modèle de synthèse relativement simple du point de vue mathématique. De plus, la compatibilité de l'interface avec, d'une part, la cosimulation utilisant le logiciel AMESim et, d'autre part, la carte DSpace contrôlant le banc d'essai, permet le test rapide de lois de commandes validées en simulation.

# Chapitre 5

## Commande par modes glissants d'ordre 1 à amplitude adaptative

Ce chapitre présente une manière de limiter l'amplitude du chattering d'une commande par modes glissants classique, en limitant l'amplitude de la commande. Le §2.1.2 a montré que l'amplitude de la commande doit être suffisante pour compenser notamment les perturbations, sous peine de divergence. En pratique, il est difficile d'estimer ces dernières, et on se résoud à les borner par un majorant pessimiste, ce qui conduit à une amplitude de la commande discontinue élevée. Cette amplitude élevée conduit à un *chattering* important qui pourrait être réduit moyennant d'adapter l'amplitude en fonction des besoins.

Certains algorithmes d'adaptation de l'amplitude de la commande basés sur la logique floue ont été proposées. Mais certains [MS00, TCL03] ne garantissent pas la précision et d'autres [HKC08] surestiment l'amplitude, conduisant à un chattering élevé. Une autre idée consiste à augmenter le gain quand le système est loin de la surface de glissement, puis d'utiliser la commande équivalente une fois que le système a convergé sur la surface [LU07].

La nouveauté de l'approche proposée ici est de réduire l'amplitude de la commande quand le système est dans une couche limite autour de la surface de glissement. Cela assure un chattering minimal sans introduire de retard ou de perte de robustesse due à la suppression de la discontinuité. Ce chapitre ne présente que la commande monovariante la plus efficace. Une autre utilisant la commande équivalente est proposé dans [PSBP10], et [PSBPre] présente une version multivariable basée sur la commande unitaire (*unit vector control*).

La première partie de ce chapitre présente un premier algorithme d'adaptation de l'amplitude d'une commande par modes glissants d'ordre 1 et la preuve de convergence de la commande complète. La deuxième s'attache à trouver le maximum de l'erreur en régime permanent ainsi que de l'amplitude de la commande, si cette dernière n'est pas saturée. L'étude fine du pire cas permet d'apporter une amélioration au premier algorithme, pour réduire le maximum de l'erreur et le pic d'amplitude de la commande. Elle est présentée dans la troisième section. La quatrième est dédiée aux résultats expérimentaux obtenus sur la plate forme d'essais électropneumatique présentée au chapitre précédent.

### 5.1 Premier algorithme

L'idée de l'algorithme est d'augmenter l'amplitude de la commande quand le système est loin de la surface de glissement, et de la réduire quand  $\sigma \simeq 0$ . On doit accepter de

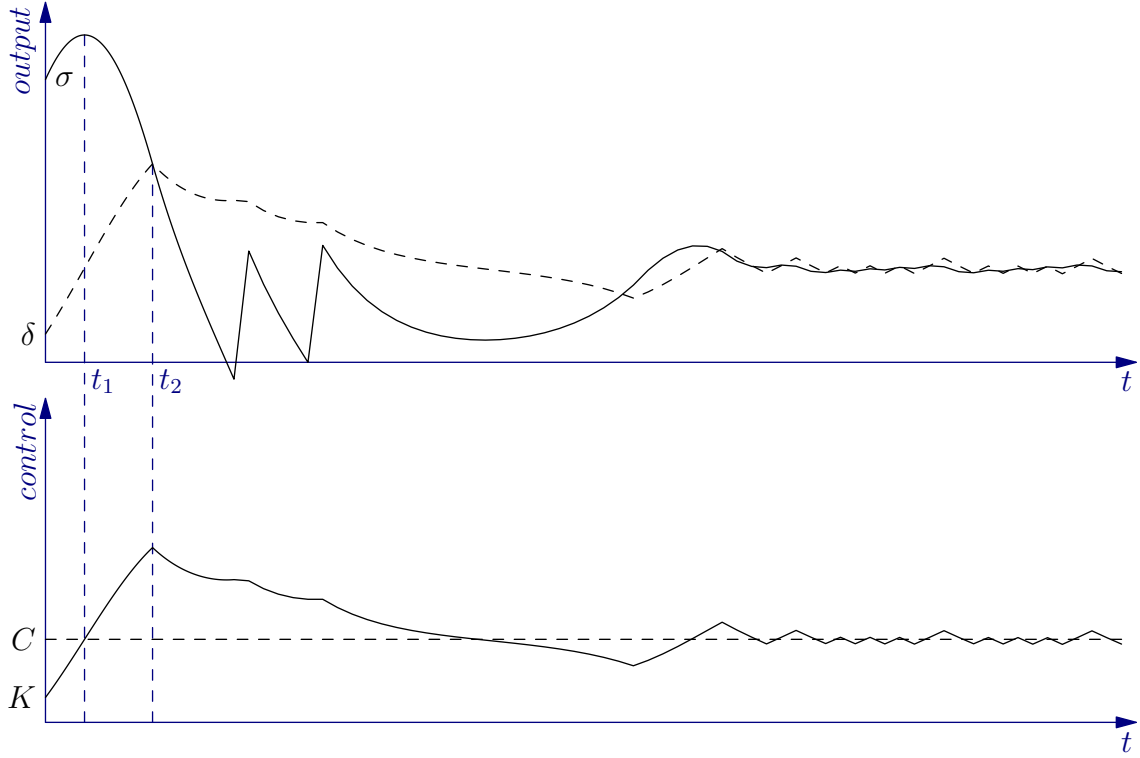


FIG. 5.1 – Exemple de comportement de la commande à amplitude adaptative pour une perturbation constante. En haut,  $\sigma(t)$  et  $\epsilon(t)$ , en bas,  $K(t)$  et la perturbation constante  $C$ .

réduire le gain même en présence d'une faible erreur, sinon, le gain ne pourrait jamais diminuer car en pratique, à cause du chattering,  $\sigma$  n'est jamais exactement nul. Cela conduit à tolérer une petite erreur, à la manière des méthodes de type "couche limite" (§2.4). À l'instar de ces dernières, la tolérance est paramétrable. Réduire ce paramètre,  $\delta$ , améliore la précision, jusqu'à un certain point dépendant du chattering. Il peut varier dans le temps, vu que l'amplitude du chattering varie avec celle de la commande discontinue.

La loi de commande est :

$$u = -K(t) \text{sign}(\sigma) \quad (5.1)$$

avec  $\sigma$ , une variable de commutation de commande par modes glissants d'ordre 1, comme (2.3) et

$$\dot{K} = \begin{cases} \bar{K}|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \delta(t)) & \text{si } K > 0 \text{ ou } \text{sign}(|\sigma| - \delta(t)) > 0 \\ 0 & \text{si } K = 0 \text{ et } \text{sign}(|\sigma| - \delta(t)) \leq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

La loi d'évolution de  $\delta(t)$  sera explicitée plus tard. Ce qui importe pour la preuve, c'est que  $\delta(t)$  reste toujours positif.

L'expression en apparence compliquée de  $\dot{K}$  est une simple protection destinée à l'empêcher de devenir négatif.  $K(t)$  évolue normalement suivant

$$\dot{K} = \bar{K}|\sigma| \text{sign}(|\sigma| - \delta(t))$$

Il augmente si  $|\sigma| > \delta(t)$ , et diminue si  $-\delta(t) < \sigma < \delta(t)$ , soit  $\sigma \simeq 0$ .

### 5.1.1 Preuve de convergence

Reprenons l'expression de  $\dot{\sigma}$  (Eq. (2.4)).

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) \in \psi(\mathbf{x}, t) - y_R^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i+1)} + [-C, C] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u$$

que l'on peut simplifier en

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) \in [-C', C'] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u$$

quitte à avoir un majorant  $C'$  trop pessimiste.

**Theorème 5.1.** *Le système (2.1) commandé par la commande (2.3)-(5.1)-(5.2) est stable. Le gain  $K(t)$  est en effet borné ainsi que l'erreur  $|\sigma|$ .*

*Démonstration.* La preuve consiste à étudier l'évolution du système jusqu'à ce que l'amplitude de la commande soit suffisante pour pouvoir compenser toutes les perturbations, à l'instant noté  $t_1$ , puis de  $t_1$  jusqu'au moment  $t_2$  où  $|\sigma(t)| = \delta(t)$ , puis de conclure.

Supposons que  $|\sigma| > \delta(t)$  à  $t = 0$ . L'amplitude de la commande augmente avec la vitesse de variation  $\dot{K} > \bar{K}\delta(t) > 0$  par l'adaptation (5.2). Elle devient donc supérieure à  $\frac{C'}{\Gamma_m}$  en un temps fini  $t_1 < \frac{C'}{\Gamma_m \bar{K} \min_{t \in [0, t_1]} (\delta(t))}$ .

À partir de ce moment  $t_1$ , la valeur absolue de l'erreur diminue, car l'amplitude  $K(t)$  est plus grande que celle des perturbations. Elle atteint donc son maximum au temps  $t_1$  ou avant, et un majorant de  $|\sigma|$  est donc  $|\sigma(0)| + C' t_1$ .

L'erreur  $|\sigma|$  devient inférieure à  $\delta(t)$  au bout d'un temps fini  $t_2$ . En effet,

$$\frac{d|\sigma|}{dt} \geq C - \Gamma_m K(t) \geq -\Gamma_m \bar{K} \min_{t \in [t_1, t_2]} (\delta(t)) (t - t_1)$$

Par intégration,  $|\sigma(t)| \leq |\sigma(t_1)| - \Gamma_m \bar{K} \min_{t \in [t_1, t_2]} (\delta(t)) \frac{(t - t_1)^2}{2}$ . En cherchant le moment où  $|\sigma(t)| = 0$ , on trouve<sup>1</sup>

$$t_2 < t_1 + \sqrt{\frac{|\sigma(t_1)|}{\Gamma_m \bar{K} \min_{t \in [t_1, t_2]} (\delta(t))}}$$

Une fois arrivé à  $t_2$ , l'amplitude diminue, car  $|\sigma| < \delta$ . On en déduit que  $K$  est maximum quand  $|\sigma| = \delta$ . Un majorant de  $K(t)$  est donc :

$$K < \frac{C'}{\Gamma_m} + \bar{K} \max_{t \in [t_1, t_2]} (\delta(t)) (t_2 - t_1)$$

Une fois  $\sigma$  dans l'intervalle  $[-\delta(t), \delta(t)]$ , l'amplitude diminue. Pendant toute cette période,  $K(t)$  et  $|\sigma(t)|$  sont donc inférieurs à leurs majorants précédents. Quand  $\sigma$  quitte l'intervalle  $[-\delta(t), \delta(t)]$ , on revient à l'instant initial de la démonstration. Donc  $|\sigma|$  ne dépasse jamais  $|\sigma(0)| + C' t_1$ , et  $K(t) < \frac{C'}{\Gamma_m} + \max_{t \in [t_1, t_2]} (\delta(t)) (t_2 - t_1)$ .  $\square$

<sup>1</sup>cela n'est exactement pas le moment où  $|\sigma(t)| = 0$ , car il faudrait prendre en compte la diminution de l'amplitude quand  $|\sigma(t)| < \delta(t)$ . Mais cela fournit un majorant simple du temps où  $|\sigma(t)| = \delta(t)$ .

Nous avons prouvé que le système est stable. Il n'est pas asymptotiquement stable, car quand  $\sigma$  reste dans la bande  $[-\delta(t), \delta(t)]$ , l'amplitude de la commande diminue, jusqu'à des valeurs très faibles (théoriquement jusqu'à 0). La commande ne peut donc plus compenser efficacement les perturbations, qui forcent alors le système à quitter la couche limite  $[-\delta(t), \delta(t)]$ .

### 5.1.2 Réglage de $\delta(t)$

Le paramètre  $\delta$  doit être le plus petit possible pour améliorer la précision. Mais il doit être suffisamment grand pour que le système puisse rester dans la bande  $[-\delta(t), \delta(t)]$  en condition réelle, *c.à.d* en tenant compte du *chattering*. Sinon, l'amplitude ne ferait qu'augmenter quelle que soit la valeur des perturbations, et on perdrait tout le bénéfice de son adaptation.

Cela signifie que si  $\sigma$  est dans la bande  $[-\delta(t), \delta(t)]$ , il ne doit pas la quitter sous le seul effet du *chattering*. Si l'on suppose que le *chattering* est dû à un retard inférieur à  $\theta$  (ou des dynamiques négligées engendrant un retard équivalent dans la pleine application de la commande) ou un échantillonnage de période inférieure à  $\theta$ , on peut établir une loi d'évolution pour  $\delta(t)$

**Theorème 5.2.** *[PSBPre] La variable de glissement ne quitte pas la bande  $[-\delta(t), \delta(t)]$  sous l'effet d'un retard inférieur à  $\theta$  si*

$$\delta(t) \geq 2\Gamma_M \theta K(t) \quad (5.3)$$

*Démonstration.* Supposons qu'à un instant  $t_1$ ,  $\sigma(t_1)$  est dans la bande  $[-\delta(t_1), \delta(t_1)]$  et que  $K(t_1)$  est suffisant pour contrer les perturbations. Alors il faut que  $|\sigma(t_1 + \theta)| \leq \delta(t_1 + \theta)$ . En appliquant l'approximation d'Euler à l'évolution de  $\sigma(t_1)$ , on a

$$\begin{aligned} |\sigma(t_1 + \theta)| &= |\sigma(t_1) + ([-C', C'] - [\Gamma_m, \Gamma_M]K(t_1) \text{sign}(\sigma))\theta| + o(\theta) \\ &\leq |\sigma(t_1)| + |[-C', C'] - [\Gamma_m, \Gamma_M]K(t_1) \text{sign}(\sigma)|\theta + o(\theta) \end{aligned}$$

Le pire cas est quand  $\sigma(t_1) = 0$ , et vu que  $\Gamma(t_1)K(t_1) > C'(t_1)$ , on a

$$|\sigma(t_1 + \theta)| \leq |2\Gamma_M K(t_1)|\theta$$

On a donc la garantie que le *chattering* ne forcera pas le système à quitter la bande  $[-\delta(t), \delta(t)]$  si

$$\delta(t) \geq 2\Gamma_M \theta K(t)$$

□

$\delta$  doit de plus rester au moins égal à l'imprécision de la mesure,  $\epsilon$ , sous peine de causer une augmentation de l'amplitude de la commande à cause de mesures situées en dehors de l'intervalle de tolérance. Nous avons donc le réglage de  $\theta$  :

$$\delta(t) = \max(2\Gamma_M \theta K(t) ; \epsilon)$$

## 5.2 Maximum de l'erreur et de l'amplitude de la commande en régime établi

Le §5.1.1 prouve la stabilité du système commandé, mais ne donne que des majorants très pessimistes de la variable de glissement  $\sigma$  et du gain  $K(t)$ .

En intégrant les dynamiques de  $\sigma$  et  $K(t)$  dans le pire cas, *c.à.d* pour les pires perturbations/incertitudes, mais sans simplification excessive, il est possible d'obtenir des majorants plus précis. Partons du moment où  $\sigma(t)$  quitte la bande  $[-\delta(t), \delta(t)]$  et étudions sa dynamique jusqu'à ce qu'elle y retourne. Sans perte de généralité, on étudie uniquement le cas  $\sigma(t) > 0$ . En résumé :  $\sigma(0) = \sigma_0 = \delta(0)$ .

### 5.2.1 Modèle

Comme,  $u(t) = K(t)$  dans le cas présent, le système composé de la dynamique de l'erreur  $\sigma$  et de l'amplitude de commande  $K$  s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = -\Gamma_m K + C' \\ \dot{K} = \bar{K} \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

avec  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sigma \\ K \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\Gamma_m \\ \bar{K} & 0 \end{bmatrix}$ .

On considère l'état initial  $\sigma_0 = \delta_0 = 2\Gamma_m\theta K_0$ , d'après le Thm. 5.2. On ne tient pas compte du *chattering*, car dans le pire cas, son effet est négligeable. De plus,  $K_0 \in \left[0, \frac{C'}{\Gamma_m}\right]$  car si  $K_0 > \frac{C'}{\Gamma_m}$ , le système converge. Le raisonnement du §5.1.1 montre que le cas où  $\sigma(t)$  atteint son maximum est celui où la perturbation est maximale à partir de  $t = 0$ , et le gain  $\Gamma_m$  est minimal. De même, le scénario où  $K(t)$  atteint son maximum est celui où  $\int \sigma(t)$  est le plus grand, donc  $\sigma(t)$  maximum, et qui dure plus longtemps possible. Il s'agit donc du même cas. Vu que la valeur de la perturbation avant  $t = 0$  n'intervient pas,  $C'$  peut donc être considérée comme un échelon.

### 5.2.2 Résolution dans le cas général

Ce système est LTI, il peut donc être résolu dans le plan de Laplace,

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( (sI - A)^{-1} \mathbf{x}_0 + (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Or,

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \bar{K}\Gamma_m} & -\frac{\Gamma_m}{s^2 + \bar{K}\Gamma_m} \\ \frac{\bar{K}}{s^2 + \bar{K}\Gamma_m} & \frac{s}{s^2 + \bar{K}\Gamma_m} \end{bmatrix}$$

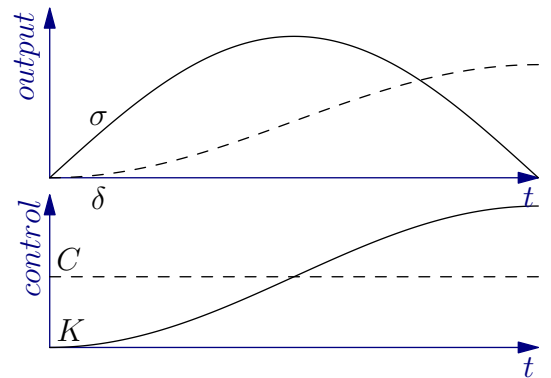


FIG. 5.2 – Comportement de  $\sigma$  et  $K$  dans le pire cas.

Ce qui donne la matrice de transition

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}t) & -\sqrt{\frac{\Gamma_m}{\bar{K}}} \sin(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}t) \\ \sqrt{\frac{\bar{K}}{\Gamma_m}} \sin(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}t) & \cos(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}t) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left( (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{C'}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{C'}{s^2 + \bar{K}\Gamma_m} \\ \frac{\bar{K}C'}{s(s^2 + \bar{K}\Gamma_m)} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{C'}{\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}} \sin(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}t) \\ \frac{C'}{\Gamma_m} (1 - \cos(\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En notant  $\omega_0 = \sqrt{\bar{K}\Gamma_m}$ , on obtient les expressions

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 \cos(\omega_0 t) - K_0 \sqrt{\frac{\Gamma_m}{\bar{K}}} \sin(\omega_0 t) + \frac{C'}{\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}} \sin(\omega_0 t) \\ K(t) &= \sigma_0 \sqrt{\frac{\bar{K}}{\Gamma_m}} \sin(\omega_0 t) + K_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{C'}{\Gamma_m} (1 - \cos(\omega_0 t)) \end{aligned}$$

En utilisant des relations trigonométriques connues, il vient

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{(C' - K_0\Gamma_m)^2}{\bar{K}\Gamma_m}} \sin(\omega_0 t + \theta_\sigma) \quad (5.6a)$$

$$K(t) = \sqrt{\sigma_0^2 \frac{\bar{K}}{\Gamma_m} + \left(K_0 - \frac{C'}{\Gamma_m}\right)^2} \sin(\omega_0 t + \theta_K) + \frac{C'}{\Gamma_m} \quad (5.6b)$$

avec

$$\begin{aligned} \theta_\sigma &= \text{atan2} \left( \sigma_0, \frac{C' - K_0\Gamma_m}{\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}} \right) \\ \theta_K &= \text{atan2} \left( K_0 - \frac{C'}{\Gamma_m}, \sigma_0 \sqrt{\frac{\bar{K}}{\Gamma_m}} \right) \end{aligned}$$

### 5.2.3 Maximum de $\sigma$ et $K$ dans le pire cas

L'Eq. (5.6a) fournit le maximum de  $\sigma$ ,

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{(C' - K_0\Gamma_m)^2}{\bar{K}\Gamma_m}} \quad (5.7)$$

Or, d'après le modèle (§5.2.1),  $\sigma_0 = 2\Gamma_M\theta K_0$ . Donc

$$\sigma_M = \sqrt{4\Gamma_M^2\theta^2 K_0^2 + \frac{(C' - K_0\Gamma_m)^2}{\bar{K}\Gamma_m}}$$

$$\frac{d\sigma_M^2}{dK_0} = 8\Gamma_M^2\theta^2 K_0 + 2\frac{K_0\Gamma_m - C'}{\bar{K}}$$

Cette dérivée est croissante, donc  $\sigma_M$  est minimum pour

$$\frac{d\sigma_M^2}{dK_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_0 = \frac{C'}{4\bar{K}\Gamma_M^2\theta^2 + \Gamma_m} \simeq \frac{C'}{\Gamma_m}$$

car  $\theta \ll 1$ .

Comme  $K_0 \in [0, \frac{C'}{\Gamma_m}]$  et que  $\frac{d\sigma_M^2}{dK_0} < 0$  pour  $\sigma_M < \frac{C'}{4\bar{K}\Gamma_M^2\theta^2 + \Gamma_m}$ ,  $\sigma_M$  atteint son maximum pour  $K_0 = 0$ . Cela correspond physiquement au cas où la dynamique du système et des perturbations sont nulles, puis subitement, la perturbation prend sa valeur maximale. D'après l'Eq. (5.7),

$$\sigma_M = \frac{C'}{\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}} \quad (5.8)$$

Par le même raisonnement,  $K(t)$  étant maximum pour  $\int_0^t \sigma(t)dt$  maximum,  $K(t)$  atteint son maximum pour  $K_0 = 0$ , et l'Eq. (5.6b) donne

$$K_M = \frac{2C'}{\Gamma_m} \quad (5.9)$$

*Remarque 5.1.* Cette valeur est un majorant, pas un maximum. En effet, ce maximum est atteint après le moment où  $|\sigma|$  est devenu plus faible que  $\delta$ . Or, le modèle simplifié utilisé ici suppose que l'amplitude  $K$  continue d'augmenter quand  $|\sigma| < \delta$ .

Dans une implémentation réelle, il est évidemment possible de limiter l'amplitude de la commande à  $\frac{C'}{\Gamma_m}$  ou une valeur supérieure, et ce maximum ne sera alors pas atteint.

### 5.3 Ajout d'un terme linéaire

Il est possible d'améliorer l'algorithme précédent en ajoutant un terme linéaire  $K_l$ .

L'algorithme devient

$$u = -K(t)\text{sign}(\sigma) - K_l\sigma \quad (5.10)$$

avec la même loi d'évolution de  $K(t)$  qu'au §5.1.

Le terme  $-K_l\sigma$  est négligeable si  $|\sigma|$  est faible, et contribue à ramener le système vers la surface de glissement si le système a quitté la phase de glissement. C'est un terme stabilisant, qui permet de réduire les dépassements de  $|\sigma|$  quand  $K(t)$  est trop faible.

Le système devient

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = K_l\sigma - \Gamma_m K + C' \\ \dot{K} = \bar{K}\sigma \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\text{avec } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sigma \\ K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -K_l & -\Gamma_m \\ \bar{K} & 0 \end{bmatrix}.$$



En suivant la même démarche qu'au §5.2.2,

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} & \frac{-\Gamma_m}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} \\ \frac{\bar{K}}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} & \frac{s + K_l}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne les expressions dans le plan de Laplace

$$\mathcal{L}\sigma(s) = \frac{\sigma_0 s}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} - \frac{K_0 \Gamma_m}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} + \frac{C'}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m}$$

$$\mathcal{L}K(s) = \frac{\sigma_0 \bar{K}}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} + \frac{K_0(s + K_l)}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m} + \frac{C' \bar{K}}{s(s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m)}$$

Le pire cas étant le même que précédemment, à savoir  $\sigma_0 = K_0 = 0$ , les expressions dans le plan de Laplace se réduisent à

$$\mathcal{L}\sigma(s) = \frac{C'}{s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m}$$

$$\mathcal{L}K(s) = \frac{C' \bar{K}}{s(s^2 + K_l s + \bar{K}\Gamma_m)}$$

La dynamique de  $\sigma(t)$  étant celle d'un second ordre, on obtient le maximum par la formule classique

$$\sigma_M = \frac{C'}{\omega_0} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

avec  $\zeta = \frac{K_l}{2\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\bar{K}\Gamma_m}$ . Donc

$$\sigma_M = \frac{C'}{\sqrt{\bar{K}\Gamma_m}} e^{-\frac{K_l \pi}{\sqrt{4\bar{K}\Gamma_m - K_l^2}}}$$

La différence par rapport au maximum de Eq. (5.8) est le terme  $e^{-\frac{K_l \pi}{\sqrt{4\bar{K}\Gamma_m - K_l^2}}} \leq 1$ , qui diminue quand  $K_l$  augmente.

## 5.4 Résultats expérimentaux sur le banc d'essais électropneumatique

Cette commande a été validée expérimentalement sur le banc d'essais électropneumatique de l'IRCCyN présenté au chapitre précédent.

Elle a été testée dans une configuration multivariable, avec pour sorties commandées la position  $y$  du piston, et la moyenne des pressions dans les chambres du vérin :  $p$  et à une fréquence d'échantillonnage de  $T = 1ms$ . Le découplage présenté dans le §4.3.1 est utilisé, ce qui transforme le problème de commande multivariable en 2 problèmes monovariables. Les variables d'état mesurées sont la sortie et la pression dans chaque chambre. Vitesse  $v$  et accélération  $a$  sont reconstruites par différences finies filtrées.

Vu que la dynamique de position est d'ordre 3, il faut construire une surface de glissement d'ordre 2, de la forme  $\sigma_y(x, t) = a + \lambda_v v + \lambda_y y$ , avec  $a$  l'accélération du piston,  $v$  sa vitesse et  $y$  sa position. Les coefficients sont réglés tels que  $\lambda_y = \omega_n^2$  et  $\lambda_v = 2 \xi \cdot \omega_n$ , avec un coefficient d'amortissement  $\xi = 0.7$  et une pulsation de coupure  $\omega_n = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Les paramètres de la commande ont été réglés de manière à avoir une bonne précision et une bonne robustesse par rapport à la force perturbatrice. Les paramètres de la commande en position sont  $\bar{K}_y = 8000$  et  $\epsilon_y(t) = 2.5 K_y(t)T$ . Ceux de la commande en pression sont  $\bar{K}_p = 8000$  et  $\epsilon_p(t) = 10 K_p(t)T$ . Les paramètres pour  $\epsilon_y(t)$  et  $\epsilon_p(t)$  ont été choisis différemment pour montrer l'impact de ce paramètre. Il est possible de réduire  $\epsilon_p(t)$  pour améliorer la précision du suivi en pression.

Les Fig. 5.3 et Fig. 5.4 montrent que le suivi est bon en position et acceptable en pression. On voit l'influence du choix de  $\epsilon(t)$  : plus il est faible (comme pour la position), plus précis est le suivi. La précision moindre en pression vient du choix de  $\epsilon_p(t)$ .

La Fig. 5.5 montre que, contrairement à une commande par modes glissants classiques, l'amplitude de la commande devient plus faible en régime permanent, ce qui diminue le *chattering*. On le voit dans les Fig. 5.3 et Fig. 5.4, où le chattering est plus faible après environ 0.5 secondes dans le régime stationnaire. C'est le temps que met l'amplitude de la commande à diminuer, comme le montre la Fig. 5.6.

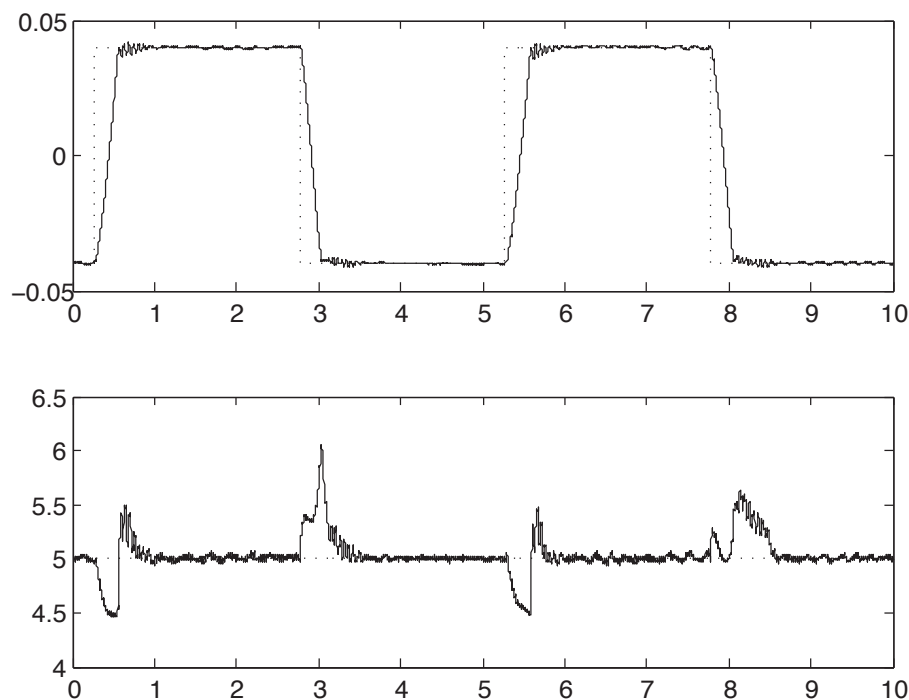


FIG. 5.3 – **Haut** : position  $y$  (m) en fonction du temps (sec) - **Bas** : moyenne des pressions dans les deux chambres du vérin (bar) en fonction du temps (sec).

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté une méthode simple mais efficace pour réduire le *chattering*. Elle consiste à faire varier l'amplitude de la commande dynamiquement en fonction de

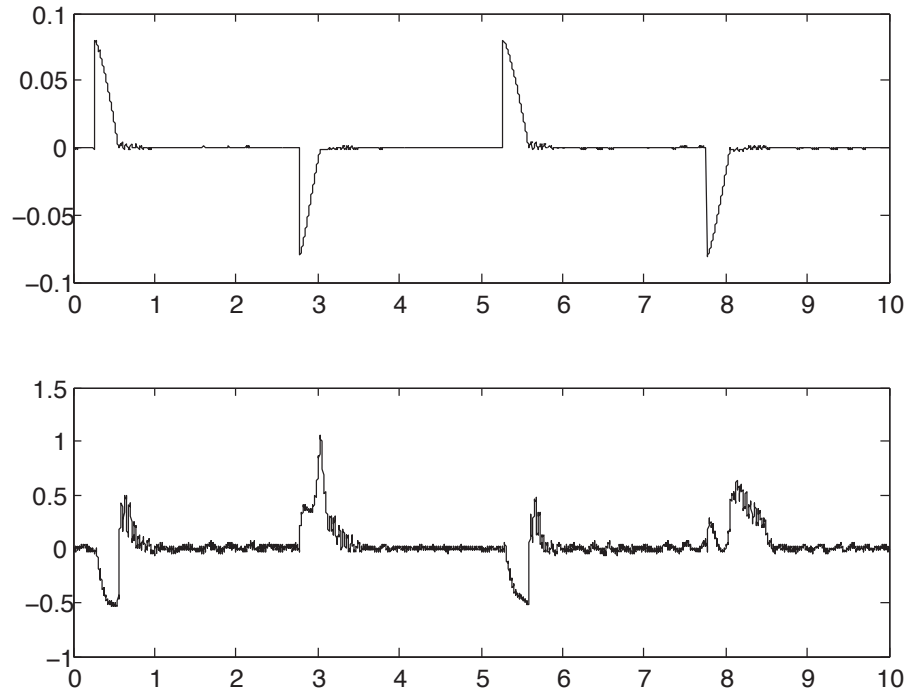


FIG. 5.4 – **Haut** : erreur de positionnement de l'actionneur ( $m$ ) en fonction du temps (sec) - **Bas** : erreur entre la moyenne réelle des pressions dans les deux chambres et la moyenne désirée ( $bar$ ) en fonction du temps (sec).

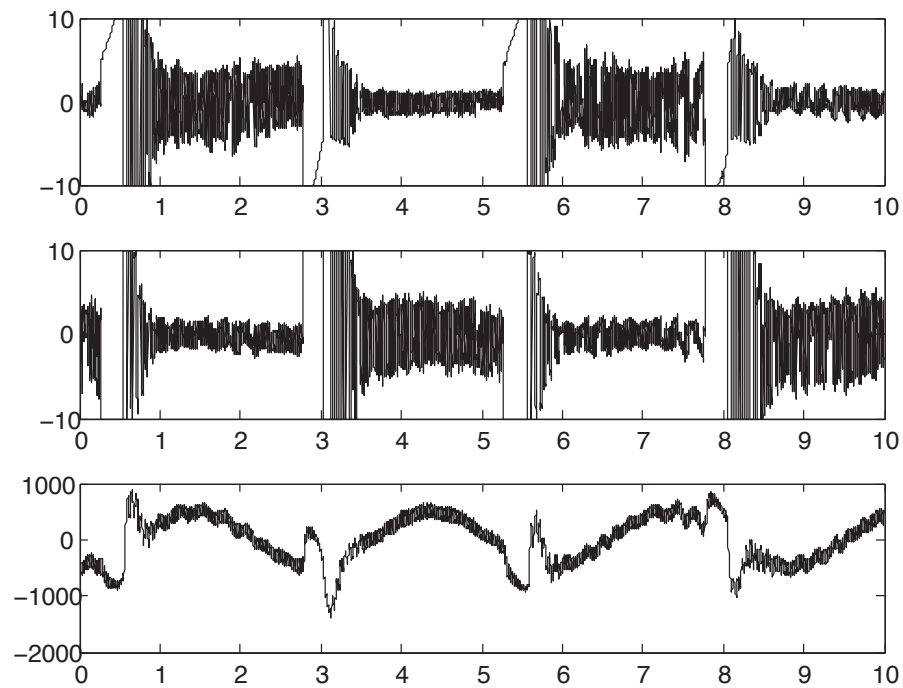


FIG. 5.5 – **Haut** : entrée de commande  $u_P$  (V) en fonction du temps (sec) - **Milieu** : entrée de commande  $u_N$  (V) en fonction du temps (sec) - **Bas** : Perturbation ( $N$ ) en fonction du temps (sec).

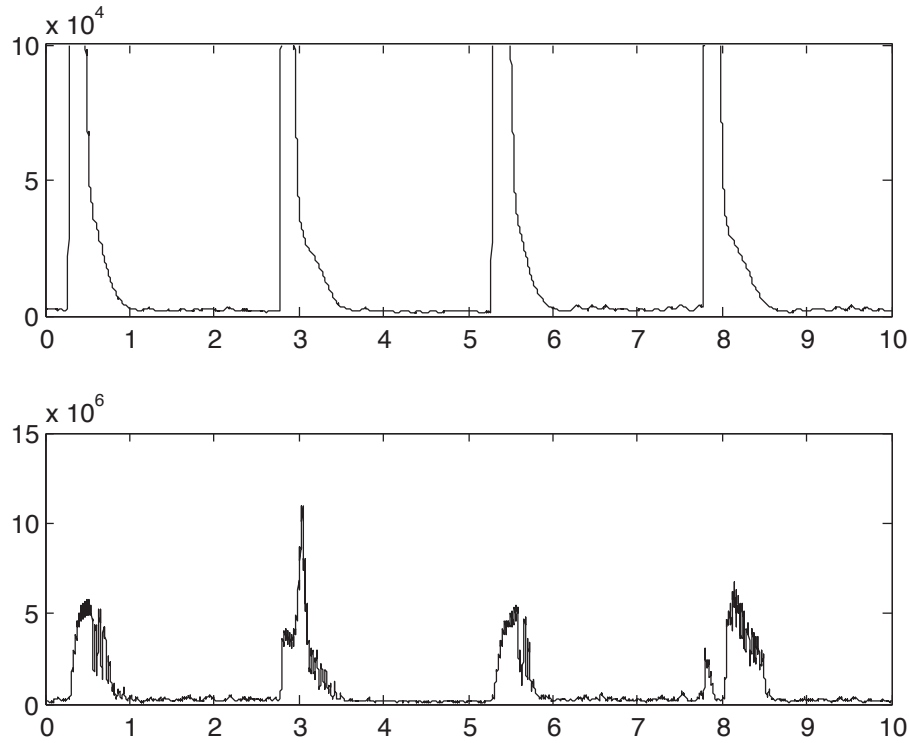


FIG. 5.6 – **Haut** : Amplitude  $K_1(t)$  en fonction du temps (sec) - **Bas** : Amplitude  $K_2(t)$  en fonction du temps (sec)

l'erreur sur la variable de glissement. Si l'erreur est trop grande, l'amplitude augmente assez rapidement ; si elle est à l'intérieur d'une couche limite, l'amplitude est réduite petit à petit, jusqu'à atteindre une valeur proche de celle des incertitudes/perturbations. Une méthode pour calculer la taille de la couche limite, qui dépend de celle du *chattering* a été proposée, facilitant le réglage des coefficients. Enfin, une étude du pire cas, en plus de la preuve classique de convergence, a permis de proposer une amélioration à l'algorithme simple, permettant une réduction de l'erreur, notamment dans le cas de perturbations variant rapidement, donc d'une dynamique rapide du gain.



# Chapitre 6

## Introduction à la commande à temps minimal

Un exemple de propriété que l'on peut exiger d'un système en régime glissant est de converger le plus rapidement possible vers l'objectif. C'est le but de la commande à temps minimal. La théorie sous-jacente est connue depuis les années 60, suite aux travaux de Bellman [Kir70] et Pontryagin [Bol69], pour ne citer que les plus célèbres. Elle est depuis tombée en désuétude, à cause de l'impossibilité de calculer analytiquement ces commandes (les ordinateurs étaient alors beaucoup moins puissants et beaucoup plus encombrants qu'au XXI<sup>e</sup> siècle), et surtout du manque flagrant de robustesse. Nous verrons au chapitre précédent que cette dernière limitation peut facilement être levée.

Mais ce chapitre se contente de présenter la théorie de la commande à temps minimal, d'abord en boucle ouverte, puis en boucle fermée. Il présente d'abord les principes les plus généraux pour exposer des résultats de plus en plus concrets et directement applicables, mais sur une classe de systèmes de plus en plus réduite. Le problème à résoudre ici est de trouver la commande permettant à un système *parfaitement connu* d'atteindre un objectif donné un temps minimal.

La première section présente le problème général de la commande optimale, ainsi que les deux principales méthodes pour le résoudre : le principe du minimum de Pontryagin et la programmation dynamique de Bellman. Nous verrons dans la deuxième partie que la commande à temps minimal en boucle ouverte est discontinue, premier point commun avec les commandes par modes glissants. La troisième partie étudie les propriétés spécifiques aux systèmes linéaires temporellement invariants (LTI). Elle présente une condition suffisante d'unicité de la commande à temps minimale, puis un résultat fondamental pour la suite : le théorème de Feldbaum, ou théorème des  $n$  intervalles. La quatrième partie donne la forme d'une commande à temps minimal en boucle fermée : c'est une surface de commutation dans l'espace d'état. Même s'il est tentant d'y voir un deuxième point commun avec les commandes par modes glissants, il ne faut pas tirer de conclusion trop hâtive. De fait, certains exemples montrent que cette surface de commutation n'est pas une surface de glissement pour des systèmes oscillants. La cinquième section est dédiée à la présentation d'algorithmes de calcul numérique d'une surface de commutation à temps minimal d'un système satisfaisant le théorème de Feldbaum, permettant ainsi de commander des systèmes d'ordre supérieur à 3, limite des méthodes analytiques.

## 6.1 Problème général de la commande optimale

### 6.1.1 Position du problème

Dans cette section, on considère un système non linéaire multivariable d'ordre  $n$  commandable et parfaitement connu. Vu que l'on ne s'intéresse pas au problème d'observation, on ne prend pas les sorties en compte, seulement l'état et l'entrée de commande. Le système s'écrit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

La fonction  $\mathbf{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et admet des dérivées continues par morceaux par rapport à  $t$ , mais n'a pas à respecter de contrainte particulière par rapport à  $\mathbf{v}$ . L'entrée de commande  $\mathbf{v}$ , de dimension  $p$ , est bornée :  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$ , où  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$  est un compact de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et ayant des dérivées continues par morceaux par rapport à  $t$ .

Le but premier est, à partir d'un état initial  $\mathbf{x}_0$  appartenant à une variété de départ<sup>1</sup>  $\mathcal{M}_0$ , d'arriver à un point quelconque d'une variété finale  $\mathcal{M}_f$ . Mais cette variété doit être atteinte en minimisant une fonction de coût  $J$ . De plus, la durée de convergence  $T_f$  peut être fixe, libre (même infinie) ou être une variable à optimiser.

On suppose que le problème admet au moins une solution, *c.à.d* qu'il existe au moins une commande permettant à l'état d'atteindre la variété cible dans le temps imparti. S'il n'y a pas de solution (ou même en pratique peu de solutions et de surcroît difficiles à trouver), le problème de commande optimale n'a pas de sens, ou pas d'intérêt en pratique. La difficulté du problème réside dans la recherche de la "meilleure" solution, au sens du critère d'optimalité choisi.

Ce critère d'optimalité, souvent appelé fonction de coût, est dans sa forme la plus simple une intégrale

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) dt$$

où  $f_0 \geq 0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et accepte des dérivées continues par morceaux par rapport à  $t$ , mais n'a pas à respecter de contrainte particulière par rapport à  $\mathbf{v}$ .

Par exemple, on peut prendre pour une commande linéaire quadratique  $f_0 = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathbf{v}$ . Si l'on veut minimiser l'utilisation de la commande (*fuel optimal control problem* dans la langue de Newton),  $f_0 = \|\mathbf{v}\|$ ; si on veut minimiser le temps,  $f_0 = 1$ .

Si l'ensemble d'arrivée n'est pas réduit à un point, on peut préférer atteindre certaines régions de la variété objectif  $\mathcal{M}_f$  plutôt que d'autres, ou on peut préférer arriver à certains instants plutôt qu'à d'autres. Pour indiquer ces préférences sur l'état final ou la durée de convergence, on ajoute un terme  $h(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ . La fonction de coût prend alors la forme

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) dt$$

où  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $t_f$

---

<sup>1</sup>Cette variété est souvent réduite à un point

### 6.1.2 2 Solutions : Principe du minimum de Pontryagin et équation d'Hamilton Jacobi Bellman

#### Principe du minimum de Pontryagin

Le problème de commande optimale est un problème difficile dans le cas général, car la recherche se fait dans un espace fonctionnel de dimension infinie.

Une condition nécessaire d'optimalité locale, donc *a fortiori* une condition seulement nécessaire d'optimalité globale est donnée par la principe du minimum de Pontryagin. Ce théorème requiert l'introduction d'une variable de même dimension  $n$  que l'état du système, appelée coétat ou multiplicateur de Lagrange  $\lambda(t)$ .

**Theorème 6.1.** *Une commande  $\mathbf{v}$  ne peut être une commande optimale que si elle satisfait le système d'équations différentielles suivant<sup>2</sup> :*

$$\text{Hamiltonien} \quad H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (6.1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Équation} \\ \text{d'état} \end{array} \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (6.2)$$

$$\begin{array}{l} \text{Équation} \\ \text{adjointe} \end{array} \quad \dot{\lambda} = -\frac{dH}{d\mathbf{x}} = -\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} - \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (6.3)$$

$$\begin{array}{l} \text{Équation} \\ \text{de commande} \end{array} \quad H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{v}, t) \text{ min par rapport à } \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}, t) \quad (6.4)$$

sous les conditions aux limites

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}_0 \quad (6.5a)$$

$$\lambda_0 \perp \mathcal{M}_0 \quad (6.5b)$$

$$\mathbf{x}(t_f) \in \mathcal{M}_f \quad (6.5c)$$

$$\lambda(t_f) = \lambda_\perp + \nabla_{\mathbf{x}} h \quad \text{où } \lambda_\perp \perp \mathcal{M}_f \quad (6.5d)$$

L'équation d'état n'apporte rien de nouveau. L'équation de commande, aussi appelée condition de minimum, permet de calculer  $\mathbf{v}$  à partir de  $\mathbf{x}$  et du coétat  $\lambda$ ,  $\lambda$  étant la solution de l'équation différentielle adjointe.

Le produit scalaire du Hamiltonien peut être transposé

$$H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)^T \lambda,$$

ce qui permet d'exprimer l'équation adjointe sous une forme plus familière

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \lambda.$$

Le principe du minimum est aussi appelé principe du maximum<sup>3</sup>. La différence tient uniquement au sens, donc au signe de  $\lambda$ . Le Hamiltonien s'écrirait alors  $H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{v}, t) =$

<sup>2</sup>Il n'est présenté ici que la forme la plus directement utilisable du théorème de Pontryagin, qui ne prend pas en compte des cas dégénérés

<sup>3</sup>C'est d'ailleurs ainsi qu'il a été originalement formulé.



$-f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , et l'équation de commande serait une maximisation au lieu d'une minimisation.

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire d'optimalité, mais elle est très forte. Dans certains cas particuliers, elle devient aussi une condition suffisante. Mais même dans le cas général, elle permet de sélectionner un petit nombre de solutions qui peuvent souvent être testées exhaustivement pour trouver l'optimum global (ou les optimaux globaux).

## Programmation dynamique de Bellman

Le principe du minimum de Pontryagin, outre le fait qu'il ne donne qu'une condition nécessaire d'optimalité, ne permet en général de calculer qu'une commande en boucle ouverte, sauf dans les rares cas où on connaît la solution analytique au système d'équations différentielles. Une approche radicalement différente permet en théorie d'obtenir un optimum global, sous une forme utilisable directement pour une commande en boucle fermée, mais sous des hypothèses beaucoup plus restrictives. Son étude permet aussi de donner un sens physique à ce mystérieux coétat.

Le principe est de trouver une équation aux dérivées partielles grâce au principe d'optimalité de Bellman, qui s'énonce ainsi :

**Théorème 6.2.** *Si une trajectoire de A à C passant par B est optimale, alors la portion de trajectoire de B à C est optimale.*

Il s'agit du principe de base sur lequel repose la programmation dynamique<sup>4</sup> qui consiste à résoudre un petit problème, ici "trouver une trajectoire optimale de B à C", puis résoudre un problème plus gros, ici "trouver la trajectoire optimale de A à C", en réutilisant le résultat partiel précédent (il ne reste plus qu'à calculer le trajet de A à B). En appliquant ce principe de proche en proche, on peut résoudre de très gros problèmes.

Dans cette section,  $*$  dénote une grandeur optimale.  $J^*(t, \mathbf{x})$  est donc la fonction coût associée à la trajectoire optimale de  $\mathbf{x}$  à la variété objectif  $\mathcal{M}_f$  à partir de l'instant  $t$ .

Pour résoudre le problème de commande optimale, on considère le *domaine atteignable*, l'ensemble des points à partir desquels on peut atteindre la variété objectif  $\mathcal{M}_f$  pour une valeur donnée de la fonction coût. À partir d'un domaine atteignable donné, on cherche à l'"agrandir" en calculant le domaine atteignable correspondant à une valeur plus grande de  $J^*$ . Cela se fait en étudiant une trajectoire optimale infiniment petite de  $\mathbf{x}_1$  à  $\mathbf{x}$  à la frontière du domaine atteignable.

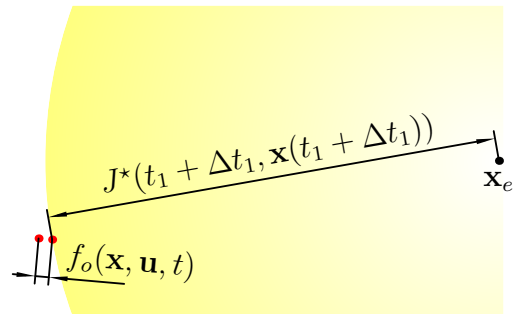


FIG. 6.1 – À la frontière du domaine atteignable

$$J^*(t_1, \mathbf{x}_1) = \min_{\substack{\mathbf{v}(t) \\ t_1 \leq t \leq t_1 + \Delta t_1}} \left\{ \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dt + J^*(t_1 + \Delta t_1, \mathbf{x}(t_1 + \Delta t_1)) \right\}. \quad (6.6)$$

En supposant que  $J^*$  soit dérivable par rapport à l'état et au temps, on obtient finalement

$$0 = \frac{\partial J^*}{\partial t}(t_1, \mathbf{x}_1) + \min_{\mathbf{v}_1} \left\{ f_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t_1) + (\nabla_{\mathbf{x}} J^*)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t_1) \right\}. \quad (6.7)$$

<sup>4</sup>Un autre exemple classique où cette méthode est très efficace est le problème du sac à dos.

En définissant le Hamiltonien

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (6.8)$$

on obtient l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = - \min_{\mathbf{v}} \{H(\mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}} J^*, \mathbf{v}, t)\}. \quad (6.9)$$

Cette équation peut rarement être résolue analytiquement, mais peut l'être numériquement, par programmation dynamique en partant de la variété objectif  $\mathcal{M}_f$ . Vu que sa résolution numérique requiert de discrétiser l'espace d'état et le temps, cela peut devenir très coûteux en mémoire dès que la dimension du système atteint 3 ou 4 et la rendre rédhibitoire pour des ordres supérieurs. Mais un défaut majeur de cette méthode est de supposer que  $J^*$  soit dérivable par rapport à l'état et au temps, ce qui n'est souvent pas le cas pour tout l'espace d'état.

Néanmoins, aux points où  $J^*$  est dérivable, on peut la transformer pour obtenir

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{x}} J^*) = - \frac{dH}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}} J^*, \mathbf{v}, t)$$

qui correspond à l'équation adjointe Eq. (6.3). Ce résultat est important, car on voit que le multiplieur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  du principe du minimum a un sens physique aux points où  $J^*$  est dérivable : c'est le gradient de la fonction coût optimal.

## 6.2 Commande à temps minimal d'un système linéaire temporellement variant

Les deux méthodes de résolution vues précédemment aboutissent à des équations impossibles à résoudre analytiquement dans le cas général, et posant même de grosses difficultés numériques. Pour pouvoir en extraire des résultats utilisables, il faut considérer des cas particuliers.

On s'intéresse ici au cas particulier de la commande à *temps minimal* d'un système *linéaire temporellement variant* ayant une composante affine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) \quad (6.10)$$

où  $\mathbf{A}(t)$  est la matrice  $n \times n$ ,  $\mathbf{a}(t)$  un vecteur de dimension  $n$  représentant une composante constante (affine), et  $\mathbf{B}(t) = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p]$  la matrice de commande  $n \times p$ . La commande  $\mathbf{v}(t)$ , de dimension  $p$ , peut prendre toute valeur dans le compact  $\mathcal{V}(t)$ .

La variété objectif  $\mathcal{M}_f$  est réduite à un point  $\mathbf{x}_f$ , ce qui permet d'utiliser le critère d'optimalité simple

$$J = \int_0^{t_f} 1 \, dt = t_f$$

où  $t_f$  est le temps de convergence, évidemment non fixé *a priori* puisque l'on cherche à l'optimiser.

### 6.2.1 Commande normée

Dans la suite, on ne traitera que le problème pour un ensemble  $\mathcal{V}$  constant, dont chaque élément est l'ensemble  $[-1; 1]$ , une commande *normée*. En effet, le problème précédent peut se ramener à celui ci moyennant un changement de variable. Soient  $m_k$  et  $M_k$  les minimum et maximum de la composante  $k$  de  $\mathbf{v}(t)$ . On peut calculer la matrice de mise à l'échelle  $\mathbf{S}(t)$  diagonale, dont les composantes sont

$$s_{kk}(t) = \frac{M_k(t) - m_k(t)}{2}$$

dans le but d'avoir des segments admissibles de longueur 2, ce qui donne la nouvelle matrice de commande

$$\mathbf{B}_n(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{S}(t) .$$

On calcule ensuite le décalage constant à ajouter à  $\mathbf{a}(t)$  :

$$\mathbf{a}_n(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{B}_a(t)\mathbf{S}(t)\bar{\mathbf{v}}(t)$$

où  $\bar{\mathbf{v}}(t)$  est le vecteur composé de la moyenne des bornes de chaque composante :

$$\bar{u}_k(t) = \frac{M_k(t) + m_k(t)}{2} .$$

### 6.2.2 Solution temporelle de l'équation différentielle

Pour trouver une solution satisfaisant le principe du minimum, il faut résoudre les équations d'état et adjointe, qui sont toutes les deux des équations différentielles linéaires. La solution générale à l'équation différentielle homogène associée au système (6.10) est définie par la matrice  $n \times n$   $\mathbf{X}(t)$  solution de [AF66]

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \quad \text{avec } \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{I}_n , \text{ la matrice identité de dimension } n \quad (6.11)$$

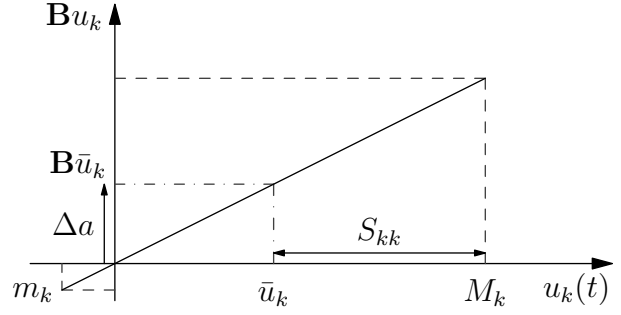
Dans le cas d'un système linéaire temporellement invariant,  $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

Par la méthode de variation de la constante, on trouve

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau) \left( \mathbf{a}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{v}(\tau) \right) d\tau . \quad (6.12)$$

Pour un système linéaire temporellement invariant, on retrouve la solution bien connue

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \left( \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) \right) d\tau .$$



### 6.2.3 Structure de la commande

Maintenant que nous avons les solutions aux deux équations différentielles du Thm. 6.1, étudions l'équation de commande. Elle permet de prouver que la commande a une structure bien particulière.

Le hamiltonien de notre problème est

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}, t) = 1 + (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t))^T \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) + (\mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t))^T \boldsymbol{\lambda}(t) .$$

Résoudre l'équation de commande consiste à trouver la commande  $\mathbf{v}$  qui minimise le hamiltonien. Vu que  $1 + \boldsymbol{\lambda}(t)^T \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t)$  ne dépend pas de  $\mathbf{v}(t)$ , il ne reste plus qu'à considérer le terme scalaire  $H_B(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}, t) = \boldsymbol{\lambda}(t)^T \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t)$ . Il vient

$$H_B = \mathbf{v}(t)^T \mathbf{B}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{v}(t)^T \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t)^T \\ \mathbf{b}_2(t)^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_p(t)^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{v}(t)^T \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) \\ \mathbf{b}_2(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{b}_p(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} .$$

Comme chaque composante de ce produit scalaire est indépendante des autres, le produit scalaire est minimal si et seulement si chaque composante est minimale.

Il faut donc trouver  $v_k$  qui minimise  $v_k(t) \mathbf{b}_k(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t)$ , étant données les bornes de  $\mathbf{v}$ . La composante  $v_k(t)$  de la commande doit donc être  $-1$  quand  $\mathbf{b}_k(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) > 0$  et  $+1$  quand  $\mathbf{b}_k(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) < 0$ . Quand  $\mathbf{b}_k(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ , la valeur de  $v_k$  n'a aucune importance. En résumé,

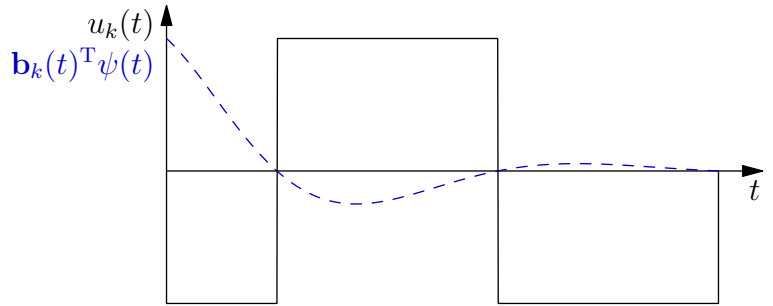


FIG. 6.2 – Commande en fonction de  $\boldsymbol{\lambda}$

$$\begin{aligned} v_k(t) &= -\text{sign}(\mathbf{b}_k(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t)) \\ \Leftrightarrow v_k(t) &= -\text{sign}(\mathbf{b}_k(t)^T \mathbf{X}^{-T}(t) \boldsymbol{\lambda}_0) \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\text{où } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ [-1; 1] & \text{pour } x = 0 \\ -1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

On voit donc que  $\mathbf{v}(t)$  ne dépend directement que du coétat  $\boldsymbol{\lambda}(t)$ , pas de l'état. De plus,  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  est la solution de l'équation adjointe qui se résume dans notre cas à

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} ,$$

car le critère d'optimalité  $f_0$  est constant, et on considère une commande en boucle ouverte, donc  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = 0$ . L'équation adjointe ne dépend pas de l'état  $\mathbf{x}$ , car le système est linéaire. Comme  $\mathbf{v}(t)$  ne dépend pas non plus de l'état, trouver la commande à temps minimal d'un système linéaire est "simple" : il "suffit" de trouver le bon coétat initial  $\boldsymbol{\lambda}_0$  et d'intégrer l'équation adjointe.

## 6.3 Propriétés spécifiques aux systèmes linéaires temporellement invariant

Même si la section précédente fournit des résultats plus concrets, résoudre une équation différentielle linéaire temporellement variante n'est pas toujours facile. De plus, les systèmes linéaires temporellement *invariants* ont d'autres propriétés intéressantes.

### 6.3.1 Condition de normalité

Le principe du minimum est dans le cas général une condition nécessaire d'optimalité. Mais dans le cas des systèmes linéaires temporellement invariants, elle est aussi suffisante quand le système satisfait une condition supplémentaire, plus forte que la commandabilité totale.

**Définition 6.1.** Soit  $\mathbf{w}$  un vecteur parallèle à un côté du domaine admissible de la commande  $\mathcal{V}$ . Si le vecteur  $\mathbf{B}\mathbf{w}$  n'appartient à aucun sous-espace invariant par la transformation  $\mathbf{A}$ , *c.à.d* les vecteurs

$$\mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{w}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{w}$$

sont linéairement indépendants, le système satisfait la condition de normalité

Pour un système monovariable (SISO), cette condition correspond à la commandabilité totale. Mais pour un système multivariable (MIMO) pour lequel  $\mathcal{V}$  est un rectangle, *c.à.d* chaque composante du vecteur de commande  $\mathbf{v}$  est bornée indépendamment des autres, cela signifie que le système doit être entièrement commandable par chaque entrée de commande prise séparément.

Un exemple de système totalement commandable qui ne satisfait pas cette condition est un système composé de sous systèmes indépendants. Dans ce cas, il faut découpler les sous systèmes et commander chacun d'eux indépendamment.

**Théorème 6.3.** [AF66] Dans le cas d'un système satisfaisant la condition de normalité, le principe du minimum de Pontryagin est une condition suffisante d'optimalité globale.

Quand cette condition n'est pas remplie, le principe du minimum reste valide, mais n'est qu'une condition nécessaire. La commande optimale n'est donc plus forcément unique, ce qui peut conduire certains algorithmes à renvoyer des résultats farfelus.

### 6.3.2 Théorème de Feldbaum

Dans le cas général d'un système vérifiant la condition précédente, on sait que la commande à temps minimal est de type *bang bang*, sans autre précision. Dans le cas particulier où le système de dimension  $n$  est monovariable à *pôles réels* (pas de pôles complexes conjugués), la commande a une propriété particulière : elle comporte au plus  $n$  phases où la commande est constante, *c.à.d*  $n - 1$  commutations de la commande entre phases, c'est le *théorème de Feldbaum*, ou *théorème des  $n$  intervalles*.

Dans cette section, on ne considère plus que des systèmes linéaires temporellement invariants commandables à *pôles réels* et monovariabiles de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{b}v \tag{6.14}$$

**Théorème 6.4.** [BG97] *La commande  $v$  amenant le système (6.14) d'un état initial  $\mathbf{x}_0$  à un état final  $\mathbf{x}_f$  est à temps minimal si et seulement si elle est une commande bang bang comportant au plus  $n$  phases durant lesquelles la commande est constante et d'amplitude maximale.*

Nous aurons besoin de quelques lemmes intermédiaires pour prouver ce théorème. Le terme clé de la preuve est  $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda}(t)$ , donnant le signe de la commande (cf. §6.2.3). Or, ce terme peut être considéré comme la sortie du système linéaire temporellement invariant

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \\ y &= \mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\tag{6.15}$$

De plus, le théorème n'est valable que pour des systèmes à pôles réels. Or, ce qui les distingue des systèmes à pôles complexes, dans le domaine temporel<sup>5</sup>, c'est le type de sa sortie, c'est un *quasipolynôme* à coefficients réels :

$$f(t) = p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_k(t)e^{\lambda_k t}\tag{6.16}$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont des réels distincts et  $p_1(t), \dots, p_k(t)$  des polynômes non nuls à coefficients réels de degrés respectifs  $m_1, \dots, m_k$ . On appelle  $m = m_1 + \dots + m_k$  le degré total du quasipolynôme.

Les racines de ces quasipolynômes ont certaines propriétés communes avec celles des polynômes classiques

**Lemme 6.5.** [BG97] *Un quasipolynôme  $f(t)$  de degré total  $m$  à exposants réels et polynômes à coefficients réels a moins de  $m$  racines (c.à.d l'équation  $f(t) = 0$  a moins de  $m$  solutions réelles distinctes). Si  $f(t)$  a exactement  $m - 1$  solutions distinctes,  $f'(t) \neq 0$  à chacune de ses racines, donc  $f(t)$  change de signe à chacune de ses racines.*

*Démonstration.* La preuve se fait par récursion. Tout quasipolynôme non nul de degré total 1 est de la forme  $f(t) = ce^{\lambda t}$ , avec  $c \neq 0$ . Comme  $\lambda$  et  $c$  sont réels, ce quasipolynôme n'a aucune racine.

Supposons que le lemme 6.5 soit vrai pour les quasipolynômes de degré total  $m - 1$ . Faisons l'hypothèse qu'il soit faux pour le degré  $m$ . Cela signifierait qu'il existe un quasipolynôme  $f(t)$  de degré total  $m$  qui admette  $m$  racines (ou plus). Le quasipolynôme

$$g(t) = f(t)e^{-\lambda_1 t} = p_1(t) + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + p_k(t)e^{(\lambda_k - \lambda_1)t}$$

a également  $m$  racines (ou plus). D'après le théorème de Rolle, sa dérivée  $g'(t)$  a donc au moins  $m - 1$  racines. Sa dérivée est

$$g'(t) = f(t)e^{-\lambda_1 t} = p'_1(t) + q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + q_k(t)e^{(\lambda_k - \lambda_1)t}$$

où chaque polynôme  $q_i(t)$  a le même degré que  $p_i(t)$ . Le degré total du quasipolynôme  $g'(t)$  est donc de  $m - 1$ . Qu'il ait  $m - 1$  racines réelles contredirait le lemme ; il n'existe donc pas de quasipolynôme de degré total  $m$  ayant au moins  $m$  racines, ce qui prouve la première partie du lemme.

Supposons maintenant que  $f(t)$  a  $m - 1$  racines  $\tau_1 < \dots < \tau_{m-1}$ . Alors  $g(t)$  a les mêmes racines, donc  $g'(t)$  a au moins une racine dans chaque ouvert  $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ ,  $i \in [1, \dots, n - 2]$  d'après le théorème de Rolle. Si  $f'(\tau_k) = 0$  pour un  $k$  donné,  $g'(\tau_k) = 0$  également, donc  $g'(t)$  aurait  $m - 1$  racines, ce qui est impossible, de par la première partie du lemme.  $\square$

<sup>5</sup>les considération fréquentielles sont inutiles ici, car on s'intéresse à des propriétés nonlinéaires de la sortie.

Nous aurons besoin d'un autre lemme pour prouver l'existence d'un quasipolynôme  $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda}(t)$  à l'origine d'une commande donnée.

**Lemme 6.6.** [BG97] Soient  $n$  réels distincts  $\tau_i, i \in [0, \dots, n-1]$ . Les  $n$  vecteurs  $\mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_0}, \mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_1}, \dots, \mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_{n-1}}$  sont linéairement indépendants.

*Démonstration.* Par l'absurde, si les  $n$  vecteurs  $\mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_i}$  sont linéairement dépendants, il existe un vecteur non nul de dimension  $n$   $\boldsymbol{\lambda}_0$  tel que  $\mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_i} \boldsymbol{\lambda}_0 = 0 \quad \forall i \in [0, \dots, n-1]$ . Mais  $\mathbf{b}^T e^{-A^T t} \boldsymbol{\lambda}_0$  est la sortie du système (6.15) dont l'état initial est  $\boldsymbol{\lambda}_0$ , il s'agit donc d'un quasipolynôme de degré  $n$  ayant  $n$  racines. D'après le lemme 6.5, la sortie est donc le polynôme nul. Ses dérivées successives  $\mathbf{b}^T (-A^T) e^{-A^T \tau_i} \boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{b}^T (-A^T)^2 e^{-A^T \tau_i} \boldsymbol{\lambda}_0, \dots$  sont donc également nulles. Comme la paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  est commandable, par transposition, le système (6.15) est observable, donc l'état  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  est lui aussi identiquement nul, contredisant l'hypothèse que  $\boldsymbol{\lambda}_0$  est non nul.  $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème lui même

*Démonstration.* La partie “seulement si” vient du fait que  $v(t) = -\text{sign}(\mathbf{b}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t))$ , or  $\mathbf{b}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t)$  est un quasipolynôme de degré total  $n-1$ , il s'annule donc au plus  $n-1$  fois d'après le lemme 6.5, donc le signe de la commande change au plus  $n-1$  fois. La commande est donc constituée d'au plus  $n$  phases pendant laquelle la commande est constante et d'amplitude maximale.

La partie “si” consiste à trouver une fonction  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  correspondant à une commande bang bang ayant au plus  $n-1$  commutations et amenant l'état de  $\mathbf{x}_0$  à  $\mathbf{x}_f$  en un temps  $t_f$ . Soient  $\tau_i$ , les instants de commutation de la commande. Si la commande a moins de  $n-1$  commutations, on complète la suite des  $\tau_i$  avec des valeurs distinctes en dehors de l'intervalle  $[0, t_f]$  pour en avoir exactement  $n-1$ . Soit  $\boldsymbol{\lambda}_0$  le vecteur orthogonal à l'hyperplan constitué des  $n-1$  vecteurs  $\mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_1}, \mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_2}, \dots, \mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_{n-1}}$  (cela est toujours possible d'après le lemme 6.6), de sens tel que  $\text{sign}(\mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda}_0) = \text{sign}(v(t=0))$  et normé tel que  $\|\boldsymbol{\lambda}_0\| = 1$ . Les instants de commutation de  $u(t)$  sont donc des racines du quasipolynôme  $\mathbf{b}^T e^{-A^T \tau_{n-1}} \boldsymbol{\lambda}_0$ , et comme ce polynôme change de signe à chaque racine d'après le lemme 6.5,  $v(t) = \text{sign}(\mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda}(t))$ . La commande  $v(t)$  satisfait donc le principe du minimum, elle est donc optimale.  $\square$

## 6.4 Commande en boucle fermée

### 6.4.1 Hypersurface de commutation

Jusqu'ici, nous avons cherché une *trajectoire optimale* étant donné un point de départ. Autrement dit, nous avons cherché une commande en boucle ouverte. La commande en boucle fermée peut s'obtenir point par point : une fois trouvée la commande optimale allant à l'objectif à partir d'un état donné, la valeur de la commande optimale en boucle fermée en cet état est la commande en boucle ouverte qu'il faudrait appliquer à  $t=0$ . En calculant ceci en chaque point, et en vertu du principe d'optimalité (Thm. 6.2), on trouve la commande optimale en boucle fermée pour tout l'espace. Étant donnée la forme de la commande (Eq. (6.13)), pour chaque composante scalaire de la commande, l'espace d'état se divise en deux parties : l'une dans laquelle cette composante est minimum, l'autre, dans laquelle elle est maximum. Les deux sont séparées par une hypersurface pour laquelle  $\mathbf{b}_k(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ , pour la composante  $k$  considérée. Cette hypersurface est appelée *surface de commutation*, car c'est seulement ici que la commande change de signe.

### 6.4.2 Théorème de Feldbaum et surface de commutation

Pour les systèmes LTI du type (6.14), mais à *pôles réels*, la surface de commutation a une propriété facilitant son calcul. Elle découle du théorème de Feldbaum.

**Corollaire 6.7.** *Un point  $\mathbf{x}_S$  appartient à la surface de commutation à temps optimal d'un système LTI monovariante commandable à pôles réels si et seulement si la commande optimale en partant de ce point a au plus  $n - 1$  phases ( $n - 2$  commutations).*

*Démonstration.* Prouvons d'abord qu'un point  $\mathbf{x}_S$  appartenant à la surface de commutation  $\mathcal{S}$  a au plus  $n - 1$  phases pendant lesquelles la commande est constante. Ajoutons une phase fictive de commande avant la première. Cette nouvelle commande a au plus  $n$  phases. C'est donc une commande à temps minimal amenant le système d'un certain état initial  $\mathbf{x}_{-1}$  à l'objectif en passant par  $\mathbf{x}_S$ . Au point  $\mathbf{x}_S$ , la commande commute ;  $\mathbf{x}_S$  appartient donc à la surface de commutation.

Au contraire, si la commande à temps minimal conduisant un état  $\mathbf{x}_0$  à l'objectif comporte exactement  $n$  phases, on ne peut pas lui ajouter une phase supplémentaire : la commande obtenue ne serait pas à temps minimal d'après le théorème de Feldbaum. Il n'y a donc aucune commutation de la commande à cet état : il ne fait pas partie de la surface de commutation.  $\square$

Ce corollaire fournit un moyen simple d'obtenir une équation paramétrique de la surface de commutation (du type  $\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\tau})$ ) : il suffit d'intégrer les trajectoires *en temps inverse* à partir de l'objectif, pour toutes les commandes ayant au plus  $n - 1$  phases. Mais pour obtenir une équation implicite de cette surface (du type  $f(\mathbf{x}) = 0$ ) plus aisée à utiliser en pratique, il faut résoudre l'équation  $\mathbf{x} - f(\boldsymbol{\tau}) = 0$  en  $\boldsymbol{\tau}$ , ce qui n'est possible analytiquement que pour des ordres faibles.

### 6.4.3 Exemples de surfaces de commutation à temps minimal

Pour un système du premier ordre, la surface de commutation à temps minimal est tout simplement  $x = 0$ , et la commande associée,  $v = -\text{sign}(x)$ .

Pour un système d'ordre supérieur, les seules équations analytiques connues s'expriment le plus facilement avec un système exprimé sous forme modale (*c.à.d* que la matrice  $\mathbf{A}$  est sous forme de Jordan), éventuellement mise à l'échelle.

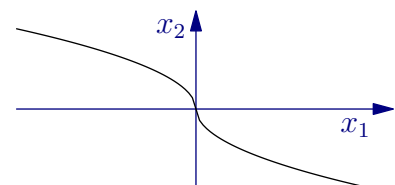
Il est très facile d'avoir des résultats indépendants du gain de la commande  $K$  pour ne considérer que des commandes normées (dans  $[-1, 1]$ ). Il suffit de diviser toutes les variables d'état par  $K$ , comme indiqué dans le §6.2.1. En effet,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}Kv \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{\mathbf{x}}}{K} = \mathbf{A}\frac{\mathbf{x}}{K} + \mathbf{b}v$$

Pour un système du 2<sup>e</sup> ordre, la forme de la surface dépend du type de système. Il est en général toujours possible de calculer la forme analytique de la surface de commutation pour un système linéaire d'ordre 2. Quelques exemples :

**Double intégrateur :** La commande est

$$v = -\text{sign}\left(x_2 + \sqrt{2}\sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1)\right)$$





**Système à 2 pôles réels distincts :** À partir d'un système sous forme canonique de commandabilité,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} v$$

on peut le transformer par la matrice de transformation  $\mathbf{P} = \frac{K}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , avec

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \text{ Cela donne}$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} v$$

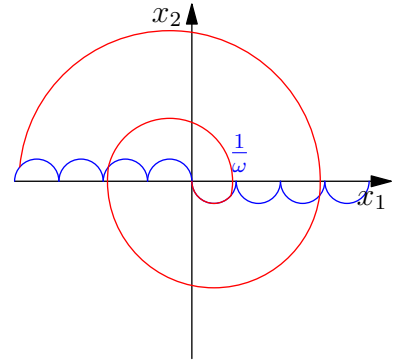
Une fois le système exprimé sous cette forme, la commande est

$$v = -\text{sign} \left( w_2 - \text{sign}(w_1) \left( (1 + |w_1|)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - 1 \right) \right) \quad (6.17)$$

**Oscillateur parfait :**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

La surface de commutation est formée de demi cercles de rayon  $1/\omega$ , comme indiqué dans la figure ci contre (en bleu). Une trajectoire du système (en rouge) indique qu'il s'agit d'une surface de *commutation*, et non de *glissement*. La commande change de signe en passant par cette surface, mais le système n'y reste pas, il ne fait que la traverser, sauf lors de la dernière portion de la trajectoire.



**Intégrateur + dynamique non linéaire :** Certains systèmes non linéaires d'ordre 2 peuvent avoir une surface de commutation simple à calculer. Un système constitué d'un intégrateur pur et d'une dynamique non linéaire s'écrit.

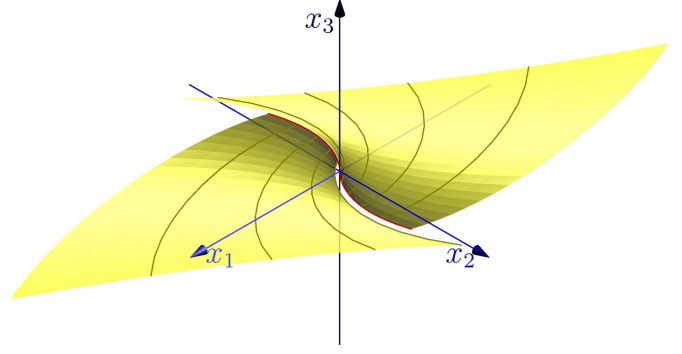
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \psi(x_2, t) + v \end{aligned}$$

et si  $\text{sign}(\psi(x_2)) = \text{sign}(x_2)$ , alors ce système est stable. Un exemple typique est un système mécanique soumis à des forces de frottements. Dans ce cas, le système obéit à la règle des  $n$  intervalles, donc la surface de commutation est l'ensemble des 2 trajectoires obtenues par intégration du système à rebours à partir de l'origine pour les 2 commandes extrémales ( $v = -1$  et  $v = 1$ ). [BG97] présente une généralisation au cas de certains systèmes non linéaires apériodiques.

Les calculs pour un système du 3<sup>e</sup> ordre sont beaucoup plus difficiles à mener. Les formes analytiques des surfaces de commutation n'existent à ma connaissance que pour quelques types particuliers de systèmes.

**Triple intégrateur :** [PF93] L'expression la plus simple de cette surface requiert des variables intermédiaires :  $g(x_2, x_3)$ ,  $h(x_2, x_3)$  et  $x_{1S}(x_2, x_3)$

$$\begin{aligned} g &= x_2 + \text{sign}(x_3) \frac{1}{2} (x_3)^2 \\ h &= \frac{1}{2} (x_3)^2 + \text{sign}(g) x_2 \\ x_{1S} &= \frac{1}{6} (x_3)^3 + \text{sign}(g) h \cdot (\text{sign}(g) x_3 + \sqrt{h}) \end{aligned}$$



La commande s'écrit alors

$$v = -\text{sign}(x_1 - x_{1S}(x_2, x_3)) \quad (6.18)$$

**Double intégrateur et 1<sup>er</sup> ordre :** Avec un système s'exprimant sous la forme modale suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} \\ \frac{1}{\tau} \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} v$$

$$g(x_1, x_2) = \text{sign}\left(x_1 + x_2 + \frac{x_2^2}{2} \text{sign}(x_2)\right)$$

$$h(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{x_2^2}{2} + g(x_1, x_2)(x_1 + x_2)}$$

$$x_{3S} = -g(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) e^{g(x_1, x_2)x_2 + h(x_1, x_2)} (2 - e^{h(x_1, x_2)})$$

La commande s'écrit alors

$$v = -\text{sign}(x_3 - x_{3S}(x_1, x_2)) \quad (6.19)$$

Même le cas de 3 pôles réels distincts n'a pas, à ma connaissance, de solution analytique en dehors de certains cas particuliers, comme  $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$  [Bal94].

Il n'existe à ma connaissance aucun résultat analytique pour des systèmes d'ordre supérieur, tout au plus des algorithmes de résolution pour certains cas particuliers, comme  $n$  pôles réels distincts [AS61, Ath62, PC05], ou une chaîne d'intégrateurs pure [WGT01].

#### 6.4.4 Espace atteignable

Nous avons jusqu'à présent supposé qu'il existait au moins une commande admissible, *c.à.d* une commande restant toujours dans  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$ , permettant au système d'aller d'un état initial  $\mathbf{x}_0$  à un état final  $\mathbf{x}_f$ . Quand c'est le cas, il existe toujours au moins une commande à temps minimal car  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$  est compact.

**Définition 6.2.** Soit  $\mathcal{R}_T$  l'ensemble des états à partir desquels il existe au moins une commande admissible permettant au système d'atteindre l'origine en un temps  $T$  ou inférieur. On appelle espace d'atteignabilité  $\mathcal{R}$  l'ensemble des états à partir desquels le système peut atteindre l'origine en temps fini grâce à une commande admissible.

Considérons le cas classique où l'objectif est l'origine de l'espace d'état, et où une commande permettant au système de rester à l'objectif une fois qu'il l'a atteint, appartient à l'intérieur de  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$ . Pour un système linéaire dont la partie constante  $\mathbf{a}$  est colinéaire à  $\mathbf{b}$ , cela implique que  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\|$ , pour une commande normée entre  $[-1; 1]$ .

- Si le système est asymptotiquement stable, alors  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ . En effet, en appliquant une commande nulle pendant suffisamment longtemps, le système arrive dans un voisinage proche de l'origine. Il suffit alors d'une commande d'amplitude très faible pour l'amener à l'origine.
- Si le système est instable,  $\mathcal{R}$  est un voisinage de l'origine, mais ne comprend généralement pas  $\mathbb{R}^n$  tout entier, car l'amplitude des termes répulsifs devient généralement plus grande que celle de la commande loin de l'origine. Aucune commande bornée ne peut alors plus amener le système à son objectif.

## 6.5 Théorème de Feldbaum sur un système partiel et calcul numérique de la surface de commutation

La méthode classique pour calculer la surface de commutation à temps minimal consiste à partir de l'objectif final  $\mathbf{x}_f$ , puis à intégrer les équations à rebours jusqu'à atteindre les limites du domaine physique dans lequel travaille le système. Cela est particulièrement facile dans le cas de systèmes à pôles réels, car d'après le corollaire 6.7, la surface de commutation est l'ensemble des espaces atteignables avec toutes les commandes ayant  $n - 1$  phases de constance de la commande. Cela permet d'avoir une équation paramétrique de la surface, mais ne donne pas directement d'équation implicite de la surface, de la forme  $f(\mathbf{x}) = 0$ . Or, cette dernière serait beaucoup plus facile à utiliser dans un régulateur : il suffirait de tester le signe de  $f(\mathbf{x})$  pour connaître le signe de la commande. Bien que les exemples précédents montrent qu'il est plus facile d'obtenir une forme analytique de la surface avec un système exprimé sous forme modale, dès que le système devient trop complexe, il faut chercher une solution numérique. Moyennant d'exprimer le système sous forme canonique de commandabilité, on peut toujours trouver une équation implicite numériquement. Cette forme a l'avantage en pratique d'utiliser directement l'estimation de l'état en provenance d'un dérivateur multiple, méthode classique dans le cas de systèmes fortement incertains ou perturbés.

### 6.5.1 Système considéré et définitions

Le système exprimé sous sa forme canonique de commandabilité est de la forme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{6.20}$$

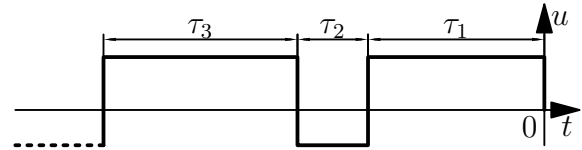
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On s'intéresse au problème qui consiste à atteindre en temps minimal non pas un point particulier, mais une variété. Par exemple, une voiture de course, modélisée comme un

système du second ordre, qui voudrait atteindre le plus vite possible la ligne d'arrivée en s'arrêtant exactement dessus, devrait accélérer puis freiner d'après le théorème de Feldbaum, car il s'agit d'un système du second ordre. Mais tout le monde sait qu'il ne faut pas freiner juste avant la ligne d'arrivée. Le principe du minimum serait-il faux ? Non, la différence vient du fait que l'objectif n'est plus dans ce cas un seul état (position, vitesse), mais une sous-variété de l'espace d'état définie uniquement par une position fixée, aucune restriction n'étant faite sur la vitesse. Et dans ce cas, la commande n'a qu'une seule phase, car la dimension de la variété objectif est 1.

Étant donné que l'on va dans la suite considérer l'effet de commandes en temps inverse, en intégrant le système en partant de l'objectif, on adopte la notation suivante :

**Définition 6.3.** Une séquence de commutation dont les durées de chaque phase sont, dans l'ordre chronologique,  $\tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1$ , et dont le signe de la commande (dans  $\{-1; +1\}$ ) pendant la dernière phase est  $s$  sera notée  $(s, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ . Pour garantir l'unicité de la notation, seules les durées des premières (dans l'ordre chronologiques) commandes peuvent être nulles. Autrement dit,  $\tau_i \neq 0$  si  $\tau_j \neq 0$  avec  $i < j$ .



**Définition 6.4.** Soit la fonction  $[x_1, \dots, x_k]^T = \mathbf{f}_k(s, \tau_1, \dots, \tau_k)$  qui, à la commande à  $k$  phases  $(s, \tau_1, \dots, \tau_k)$  associe la sortie et ses  $k - 1$  premières dérivées  $[x_1, \dots, x_k]^T$  calculés en temps inverse à partir de l'objectif.

**Définition 6.5.** Soit l'ensemble  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^n$  des états atteignables à partir de l'état objectif  $\mathbf{x}_f$ . Le sous-ensemble  $\mathcal{R}_k \subset \mathbb{R}^k$ ,  $k \leq n$  est l'ensemble des vecteurs  $[x_1, \dots, x_k]$  correspondant aux premières coordonnées des états de  $\mathcal{R}$ .

### 6.5.2 Théorème de bijection

Pour la preuve du théorème principal de ce paragraphe, nous aurons besoin du lemme suivant

**Lemme 6.8.** La réponse impulsionnelle d'un système LTI de dimension  $n$  à pôles réels et comportant  $k < n$  zéros (éventuellement complexes) change de signe au plus  $k$  fois.

*Démonstration.* Décomposons le système en un sous système principal qui comprend  $k + 1$  pôles et les  $k$  zéros, suivi de  $n - (k + 1)$  systèmes du premier ordre. Étudier la réponse impulsionnelle d'un système revient à étudier sa réponse libre à partir d'un état initial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ . La réponse du sous système principal est un quasipolynôme de degré total  $k$ . D'après le lemme 6.5, elle change de signe au plus  $k$  fois.

Cette réponse est l'entrée du premier système du 1<sup>er</sup> ordre. Or, la réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre à une entrée qui change une fois de signe ne change qu'au plus une fois de signe. Par une récursion immédiate, il vient que sa réponse à une entrée qui change  $k$  fois de signe ne change qu'au plus  $k$  fois de signe. Comme la sortie d'un système du 1<sup>er</sup> ordre est l'entrée du suivant, le nombre de fois que le signal change de signe n'augmente pas en traversant la chaîne de systèmes du 1<sup>er</sup> ordre. La sortie du système a donc au plus  $k$  changements de signe.  $\square$

Le théorème fondamental pour la suite est :

**Theorème 6.9.** *Pour tout  $k \leq n$ , la fonction  $\mathbf{f}_k$ , est une bijection entre  $\{-1; +1\} \times \mathbb{R}^{+k}$  et  $\mathcal{R}_k$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{M}_0$  l'ensemble des points dont les premières coordonnées sont  $x_1, \dots, x_k$ , avec  $[x_1, \dots, x_k]^T \in \mathcal{R}_k$ . L'idée de la preuve est d'abord de montrer qu'une commande à temps minimal amenant le système de la variété de départ  $\mathcal{M}_0$  à l'objectif  $\mathbf{x}_f$  a au plus  $k$  phases de constance de la commande, puis de montrer que cette commande et le point  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}_0$  sont uniques.

Vu qu'il existe au moins une commande admissible conduisant le système d'un point de  $\mathcal{M}_0$  à  $\mathbf{x}_f$ , il existe par définition une commande à temps minimal faisant la même chose. Cette commande à temps optimal doit satisfaire le principe du minimum. Comme  $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda} = \lambda_n$ , l'équation adjointe et l'équation de commande sont

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \quad (6.21)$$

$$u = -\text{sign}(\lambda_n) \quad (6.22)$$

Moyennant le changement de variable  $\lambda_i = (-1)^{n-i} \lambda_i$ , on obtient un système sous forme canonique d'observabilité. En notant que la réponse à l'impulsion  $[(-1)^{n-1} \lambda_1, \dots, (-1)^{n-k} \lambda_k, 0, \dots]$  est équivalente à partir de l'état initial  $[(-1)^{n-1} \lambda_1, \dots, (-1)^{n-k} \lambda_k, 0, \dots, 0]^T$ ,  $u$  est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & (-1)^n a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} a_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} + \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} \lambda_1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-k} \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (6.23)$$

$$u = -\text{sign}(\lambda_n) \quad (6.24)$$

où  $\delta(t)$  est l'impulsion de Dirac. En considérant la sortie  $\lambda_n$ , ce système est la forme canonique d'observabilité d'un système ayant  $n$  pôles réels (opposés à ceux du système) et  $k-1$  zéros. D'après le lemme 6.8, le signe de  $\lambda_n(t)$  ne change qu'au plus  $k-1$  fois, donc la commande à temps optimal  $u(t)$  n'a qu'au plus  $k$  phases.

Prouvons maintenant que le point de départ des commandes à temps minimal  $\mathbf{x}_0$  est unique. D'après [AF66], l'ensemble des points  $\mathcal{R}_T$  à partir desquels on peut atteindre  $\mathbf{x}_f$  en un temps  $T$  est strictement convexe et croît avec  $T$ . De plus, une commande conduisant le système de  $\mathbf{x}_1$  à  $\mathbf{x}_f$  en un temps  $T$  est à temps optimal si et seulement si  $\mathbf{x}_1$  est sur la frontière de  $\mathcal{R}_T$ .  $\mathbf{x}_0$  appartient à la frontière du plus petit  $\mathcal{R}_T$  et appartient aussi à  $\mathcal{M}_0$ . S'il existait un autre point d'intersection entre le sous-espace vectoriel  $\mathcal{M}_0$  et la frontière de  $\mathcal{R}_T$ , comme  $\mathcal{R}_T$  est strictement convexe, il existerait un point de  $\mathcal{M}_0$  appartenant à l'intérieur de  $\mathcal{R}_T$ . Il pourrait donc être atteint en moins de temps qu'une commande à temps minimal, ce qui est impossible.  $\mathbf{x}_0$  est donc unique. Comme le système est normal (cf§6.3.1), la commande permettant au système d'aller de  $\mathbf{x}_0$  à  $\mathbf{x}_f$  est elle aussi unique.  $\square$

### 6.5.3 Forme implicite de la surface de commutation

Le théorème précédent fournit une équation implicite simple de la surface de commutation à temps minimal.

**Corollaire 6.10.** *Il existe une équation implicite de la surface de commutation à temps minimal d'un système LTI sous la forme canonique de commandabilité (6.20) de la forme*

$$x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - x_n = 0 \quad (6.25)$$

*La commande à temps minimal peut donc s'exprimer sous la forme*

$$v(\mathbf{x}) = -\text{sign}(x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - x_n) \quad (6.26)$$

*Démonstration.* D'après le corollaire 6.7, l'ensemble des points de la surface de commutation est constitué des points à partir desquels on peut atteindre l'objectif grâce à une commande à temps minimal ayant au plus  $n - 1$  commutations.

Or, d'après le théorème précédent, il existe une bijection  $\mathbf{f}_{n-1}$  entre l'ensemble des commandes à temps minimal ayant au plus  $n - 1$  phases et  $\mathcal{R}_{n-1}$ . Pour tout point de  $\mathcal{R}_{n-1}$  de coordonnées  $[x_1, \dots, x_{n-1}]$ , on peut donc calculer la séquence de commande à temps minimal ayant  $k - 1$  phases  $(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$  à partir du point  $[x_1, \dots, x_{n-1}]$  en inversant  $\mathbf{f}_{n-1}$ . En intégrant à rebours le système à partir de  $\mathbf{x}_f$ , on trouve la coordonnée  $x_n$  de l'état initial  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$ .

On a donc construit la fonction  $x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  qui, à partir des  $n - 1$  premières coordonnées d'un état donne la dernière coordonnée  $x_{n_d}$  telle que ce point soit sur la surface de commutation, ce qui prouve la première partie du corollaire.

La preuve de la deuxième partie découle du fait que l'on travaille sur la forme canonique de controllabilité et que l'on cherche à atteindre la surface de commutation pour réduire la durée de la première phase de constance de la commande à 0. Si  $x_n > x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , il faut que la commande soit négative pour que  $x_n$  diminue pour rejoindre la surface de commutation, et l'opposé est vrai si  $x_n < x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ .  $\square$

Le théorème du paragraphe précédent ne fournit pas qu'une preuve d'existence de cette forme (6.25) de l'équation implicite, mais aussi un algorithme numérique pour obtenir cette surface pas à pas, en commençant par inverser  $\mathbf{f}_1$ , puis  $\mathbf{f}_2$ , ainsi de suite jusqu'à  $\mathbf{f}_{n-1}$ .

### 6.5.4 Algorithme de calcul pour le cas général

Il s'agit ici de trouver deux algorithmes liés :

- un algorithme de calcul d'un nuage de points  $x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  de la surface de commutation
- une interpolation du nuage de points précédents pour savoir de quel côté de la surface un point donné de l'espace d'état se trouve.

Le premier algorithme n'a pas de contrainte de performance particulière, car il est exécuté hors ligne, sur un PC. L'algorithme d'interpolation et de comparaison, lui, doit être le plus rapide possible, car il doit être exécuté en ligne, sur un processeur éventuellement peu puissant. Le nuage de points doit également être le plus petit possible, car la mémoire disponible sur un ordinateur embarqué est faible.

La méthode d'interpolation la plus économe en puissance de calcul est l'interpolation multilinéaire sur une grille orthogonale, *c.à.d* avec des points régulièrement espacés suivant

chacune des dimensions  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . L'interpolation multilinéaire est une combinaison d'interpolations linéaires suivant chaque dimension. Cette méthode a été choisie, car elle est simple à calculer (peu de calculs en ligne), et que des méthodes d'ordre plus élevé (cubiques, ...) ne donnent pas une meilleure précision, car elles exigent que la fonction à interpolée soit dérivable, or  $x_{nd}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  ne l'est pas partout. Plus précisément, elle n'est pas dérivable aux points correspondant à une séquence de commande comportant  $n - 2$  phases ou moins. Comme le système arrive rapidement dans un voisinage de ces points et y reste, car ils forment la trajectoire menant vers l'objectif, il faut que l'interpolation soit précise dans ce voisinage.

La variation de pente aux points de non dérivabilité de  $x_{nd}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  entraîne une perte de précision. Pour la réduire, il faudrait modifier la grille aux points correspondant à une commande ayant  $n - 2$  phases ou moins, ce qui compliquerait l'interpolation. Par contre, un constat permet d'améliorer la précision tout en réduisant la taille de la grille : si la précision aux points proches de l'origine doit être élevée, car elle conditionne la précision finale, l'état du système loin de l'origine n'a pas besoin d'être forcé de manière précise. Il doit juste rester dans un voisinage de la surface idéale. Cela conduit à l'idée d'utiliser plusieurs grilles de taille différentes : l'une ayant un maillage grossier, mais s'étendant sur tout le domaine physique atteignable par le système, l'autre ne couvrant qu'un voisinage proche de l'origine, mais beaucoup plus finement. On peut éventuellement rajouter une troisième grille intermédiaire, pour un meilleur rapport précision / nombre total de points (donc taille mémoire du nuage de points).

La surface de commutation étant symétrique par rapport à l'origine pour une commande symétrique par rapport à 0, il n'est nécessaire de considérer qu'une moitié de la surface de commutation. L'autre s'en déduit par symétrie. De plus, il n'est nécessaire de calculer la surface que pour une commande normée, car on peut toujours se ramener à ce cas par changement de variable (cf §6.2.1 et §6.4.3).

L'algorithme de calcul de la grille de points travaille en temps inverse à partir de l'origine de l'espace d'état. Trouver la valeur  $x_{nd}$  correspondant à  $\mathbf{x}_a = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  consiste à trouver la séquence de commande ayant au plus  $n - 1$  phases et conduisant le système en  $\mathbf{x}_a$ , ce qui est toujours possible d'après le Thm. 6.9. Il suffit ensuite d'intégrer le système (toujours à rebours à partir de l'origine) pour trouver la valeur de la coordonnée  $x_n$ .

Pour inverser la fonction  $[x_1, \dots, x_k]^T = \mathbf{f}_k(s, \tau_1, \dots, \tau_k)$  pour  $k = n - 1$ , la méthode la plus rapide, étant donné que l'on connaît la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}_k$ , est la méthode de Newton, en supposant que la matrice jacobienne soit inversible. Cette méthode requiert une estimation initiale de la séquence de commande relativement proche de la solution. Mais vu que l'on cherche à inverser la fonction pour chaque point de la grille, on peut résoudre le problème de proche en proche en réutilisant le résultat précédemment obtenu comme estimation initiale pour un point voisin. Un premier problème est que les durées  $\tau_i$  doivent constamment rester positives, sinon le résultat obtenu n'a pas de sens. Pour ce faire, il faut changer le signe de la première phase, ce qui implique de décaler les durées, car on rajoute ou supprime une phase au début de la séquence. Aucune méthode d'optimisation paramétrique ne gérant ces phénomènes, il vaut mieux s'assurer que la valeur du signe est correcte avant d'utiliser l'algorithme de Newton. Cela peut se faire en inversant les fonctions  $\mathbf{f}_k$  successivement pour  $k = 1$  à  $k = n$ . Étant donné le nuage de points résultant de l'inversion de  $\mathbf{f}_{k-1}$ , le signe de la première phase de la commande reste constant tant que l'on reste du même côté de la variété définie par l'inverse de  $\mathbf{f}_{k-1}$ .

Un second problème est que la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}_k$  est singulière aux points où  $\tau_{k-1} = 0$ . Cela impose le recours à une méthode d'optimisation paramétrique n'utilisant pas la dérivée, comme la méthode de Nelder-Mead, autour de ces points.

Pour résumer, en ne calculant que la demi grille  $x_1 > 0$  et pour une commande normée, l'algorithme de calcul du nuage de points est :

**Étape 1 :** inverser  $[x_1] = \mathbf{f}_1(s, \tau_1)$  pour les points d'une grille monodimensionnelle, en allant de proche en proche  $x_{1_0} > 0$  jusqu'à  $x_1 < x_{1_{max}}$ . Le maximum est déterminé par le maximum physiquement réalisable par le système divisé par l'amplitude de la commande (à cause de la normalisation de la commande). L'inversion peut être faite par la méthode de Newton, ou tout autre méthode monodimensionnelle.

**Étape 2 :** Calculer les valeurs  $x_2$  pour chacun des points précédents en intégrant le système.

**Étape 3 :** À partir de chaque point  $[x_{1_0}, x_{2_0}]$  calculés lors de l'étape précédente (et la valeur  $(\tau_{1_0}, \tau_{2_0})$  associée), inverser de proche en proche  $[x_{1_0}, x_2] = \mathbf{f}_2(s, \tau_1, \tau_2)$  pour tous les points d'une grille bidimensionnelle (de  $x_{1_0} > 0$  à  $x_{1_{max}}$  et  $-x_{2_{max}}$  à  $x_{2_{max}}$ ). Pour  $x_2 > x_{2_0}$ ,  $s = 1$ , et pour  $x_2 < x_{2_0}$ ,  $s = -1$ , et il faut également intervertir  $\tau_1$  et  $\tau_2$  entre les deux zones.

**Étape 4 :** Calculer les valeurs  $x_3$  pour chacun des points précédents en intégrant le système.

**Étapes 5 et suivantes :** Réitérer les étapes 3 et 4 pour chaque dimension  $k$  jusqu'à  $n - 1$ . Autrement dit, inverser  $[x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_k] = \mathbf{f}_k(s, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$  pour les points d'une grille de dimension  $k$ , et calculer le  $x_{k+1}$  correspondant.

Étant donné un point  $\mathbf{x}$  dont on souhaite savoir de quel côté de la surface il se trouve, l'algorithme d'interpolation et comparaison se compose de :

**Étape 1 :** Si le point appartient au demi espace  $x_1 < 0$ , exécuter les étapes suivantes avec le symétrique  $(-\mathbf{x})$ , et inverser le résultat final<sup>6</sup>.

**Étape 2 :** Pour chaque dimension  $j$ , si  $x_j$  est compris entre les valeurs de la grille  $x_{j_i}$  et  $x_{j_{i+1}}$ , calculer  $c_j = \frac{x_j - x_{j_i}}{x_{j_{i+1}} - x_{j_i}}$ .  $c_j$  est compris entre 0 et 1.

**Étape 3 :** Appelons  $x_{j_g}$  une coordonnée de la grille suivant la dimension  $j$ . Calculer récursivement pour  $j$  allant de 1 à  $n - 1$

$$x_{n_d}(x_{1_g}, \dots, x_{j-1_g}, x_j, \dots, x_{n-1}) = (1 - c_j)x_{n_d}(x_{1_g}, \dots, x_{j-1_g}, x_{j_i}, x_{j-1}, \dots, x_{n-1}) + c_j x_{n_d}(x_{1_g}, \dots, x_{j-1_g}, x_{j_{i+1}}, x_{j-1}, \dots, x_{n-1}) \quad (6.27)$$

**Étape 4 :** comparer la valeur de  $x_n$  du point à tester à la valeur  $x_{n_d}$  calculée précédemment.

### 6.5.5 Algorithme de calcul pour une chaîne d'intégrateurs purs

Si le système est une chaîne d'intégrateurs purs, la commande est homogène de degré  $-1$  et de poids de modes glissants d'ordre supérieur. On peut utiliser cette propriété pour réduire la dimension du nuage de points à stocker de 1. En effet, par dilatation,

$$x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \kappa^{-1} x_{n_d}(\kappa^n x_1, \kappa^{n-1} x_2, \dots, \kappa^{n+1-i} x_i, \dots, \kappa^2 x_{n-1})$$

<sup>6</sup>Il est également possible de tester le signe et éventuellement rendre le symétrique pour chaque point de la grille nécessaire à l'interpolation. Cela permet de gérer les cas où  $x_1 \simeq 0$



L'idée est de trouver la valeur de  $\kappa$  telle que le point

$$\mathbf{a} = [\kappa^n x_1, \kappa^{n-1} x_2, \dots, \kappa^{n+1-i} x_i, \dots, \kappa^2 x_{n-1}]^T$$

soit sur une sphère unité étant donnée une norme appropriée. Il suffit alors de précalculer la valeur de  $x_{n_d}$  uniquement sur cette sphère unité pour connaître sa valeur dans tout l'espace.

Pour ce faire, on peut appliquer une transformation d'état qui va transformer les "rayons homogènes" *c.à.d* les courbes  $\{d_\kappa \mathbf{x}, \kappa > 0\}$ , en rayons linéaires, pour appliquer une mise à l'échelle linéaire classique. Cette transformation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt[n]{|x_1|} \text{sign}(x_1) \\ \sqrt[n-1]{|x_2|} \text{sign}(x_2) \\ \vdots \\ \sqrt[n+1-i]{|x_i|} \text{sign}(x_i) \\ \vdots \\ \sqrt{|x_{n-1}|} \text{sign}(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

De manière à ce que

$$\begin{bmatrix} \kappa^n x_1 \\ \kappa^{n-1} x_2 \\ \vdots \\ \kappa^{n+1-i} x_i \\ \vdots \\ \kappa^2 x_{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \kappa \sqrt[n]{|x_1|} \text{sign}(x_1) \\ \kappa \sqrt[n-1]{|x_2|} \text{sign}(x_2) \\ \vdots \\ \kappa \sqrt[n+1-i]{|x_i|} \text{sign}(x_i) \\ \vdots \\ \kappa \sqrt{|x_{n-1}|} \text{sign}(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

En utilisant ensuite la norme 1, pour des raisons de facilité de calcul en ligne, on voit que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \kappa \sqrt[n+1-i]{|x_i|} = \kappa \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt[n+1-i]{|x_i|}$$

Si  $\mathbf{a}$  est choisi sur la sphère unité,  $\sum_{i=1}^{n-1} \kappa \sqrt[n+1-i]{|x_i|} = 1$  par définition, d'où

$$\kappa = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt[n+1-i]{|x_i|}}$$

L'algorithme de calcul de  $x_{n_d}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  est donc :

**Étape 1 :** Appliquer la transformation  $x_i \rightarrow \sqrt[n+1-i]{|x_i|} \text{sign}(x_i)$ .

**Étape 2 :** Calculer la norme 1 de l'état transformé et l'inverser, ce qui donne  $\kappa$ .

**Étape 3 :** Normaliser l'état transformé en le multipliant par le facteur  $\kappa$ .

**Étape 4 :** Calculer la valeur de  $x_{n_d}$  pour l'état transformé et normalisé, par interpolation du nuage de points (calculés sur la sphère unité).

**Étape 5 :** Diviser le résultat précédent par  $\kappa$ .

### Généralisation de l'algorithme précédent

On peut aussi utiliser une autre transformation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} |x_1|^{\frac{p}{n}} \text{sign}(x_1) \\ |x_2|^{\frac{p}{n-1}} \text{sign}(x_2) \\ \vdots \\ |x_i|^{\frac{p}{n+1-i}} \text{sign}(x_i) \\ \vdots \\ |x_{n-1}|^{\frac{p}{2}} \text{sign}(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

avec  $p$  strictement positif. Si  $p = 1$ , on se retrouve dans le cas précédent, mais de manière générale

$$\begin{bmatrix} \kappa^n x_1 \\ \kappa^{n-1} x_2 \\ \vdots \\ \kappa^{n+1-i} x_i \\ \vdots \\ \kappa^2 x_{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \kappa^p x_1^{\frac{p}{n}} \\ \kappa^p x_2^{\frac{p}{n-1}} \\ \vdots \\ \kappa^p x_i^{\frac{p}{n+1-i}} \\ \vdots \\ \kappa^p x_{n-1}^{\frac{p}{2}} \end{bmatrix}$$

$\kappa$  se calcule alors par

$$\kappa = \sqrt[p]{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{\frac{p}{n+1-i}}}}$$

Le choix de la transformation, à l'instar de celui de la norme utilisée (norme 1, 2 ou  $\infty$ ), donne la liberté pour choisir la méthode la plus économe en calculs en ligne et en mémoire, tout en étant suffisamment précise numériquement.

## 6.6 Conclusion

Ce chapitre forme une brève introduction à la théorie de la commande à temps minimal, nécessaire pour aborder sereinement le chapitre suivant. L'équation de commande donnée par le principe du minimum de Pontryagin donne une propriété fondamentale de la commande à temps minimale : c'est une commande discontinue, dont la valeur est soit minimum, soit maximum, sauf dans des cas dégénérés où le coétat  $\lambda$  est nul sur un intervalle. Pour des systèmes linéaires temporellement invariants, une condition plus forte que la commandabilité totale implique l'unicité de la commande, et le fait que la commande est uniquement constituée de phases où elle est minimum alternant avec celles où elle est maximum. Cette condition étant vérifiée pour tous les systèmes monovariabiles, elle s'étend naturellement aux systèmes découplables. Les systèmes à pôles réels uniquement ont une autre propriété qui va se révéler essentielle lors du chapitre suivant : le théorème de Feldbaum indique que la séquence de commande à temps minimal pour un tel système d'ordre  $n$  est composée d'au plus  $n$  phases pendant lesquelles la commande est constante (soit minimum, soit maximum).

La commande à temps minimal en boucle fermée est constituée d'une surface de commutation divisant l'espace d'état en deux : dans une partie, la commande est minimale, dans l'autre, maximale. Pour les systèmes à pôles réels, satisfaisant le théorème de Feldbaum, cette surface est constituée de l'ensemble des points à partir desquels le système

peut atteindre l'origine de l'espace d'état par une commande à temps optimal ayant au plus  $n - 1$  phases.

Quelques exemples en dimension 2 et 3 montrent la forme que peut avoir la surface de commutation à temps minimal et les trajectoires du système en boucle fermée. Ils suggèrent aussi la difficulté du calcul analytique de ces surfaces. Pour la vaincre, et pouvoir utiliser des commandes en boucle fermée pour des systèmes d'ordre supérieur, deux algorithmes de calcul numérique de la surface sont proposés : l'un calcule la surface pour tout système LTI à pôles réels, l'autre exploite l'homogénéité avec des poids de mode glissant d'ordre supérieur spécifiques aux chaînes d'intégrateurs pures pour diminuer la dimension du nuage de points, et donc sa taille en mémoire.

Le chapitre suivant réutilisera ces notions pour les appliquer à des systèmes incertains.

# Chapitre 7

## Commande par modes glissants d'ordre supérieur basée sur la commande à temps optimal

Dans le chapitre précédent, le système considéré était parfaitement connu, sans aucune perturbation ou incertitude. Les résultats obtenus sont donc purement théoriques. Mais la commande à temps minimal et la commande par modes glissants ont plus en commun que le fait d'être deux commandes discontinues. Elles sont complémentaires. L'idée générale est de réaliser une commande par modes glissants dont la commande équivalente (cf. §2.2.1) est une commande à temps minimal. Bien sûr, il faut que la surface de commutation à temps minimal soit aussi une surface *de glissement* pour le modèle de référence, sinon, la commande est à *structure variable*, et pas par modes glissants. Ce type de commande permet, à l'instar de la commande par modes glissants d'ordre 1, de commander un système non linéaire grâce à un modèle de référence linéaire. Là où le modèle de référence d'une commande par modes glissants d'ordre 1 est un système linéaire d'ordre  $n - 1$  si  $n$  est l'ordre du système<sup>1</sup>, le modèle de référence est ici un système linéaire commandé par une commande à temps minimal.

La première partie de ce chapitre présente le modèle transformé utilisé dans le reste de ce chapitre. Il permet de rejeter les perturbations dans la commande, pour que le système lui même soit parfaitement connu. Cela permet d'utiliser certains résultats du chapitre précédent, sous certaines conditions. Elles sont explicitées lors de la présentation de la commande dans la deuxième section, qui prouve également la convergence en temps fini vers l'origine, donc qu'il s'agit d'un mode glissant d'ordre supérieur idéal, ainsi que le fait que la précision obtenue est celle d'un mode glissant d'ordre supérieur réel. La troisième partie étudie l'application de cette stratégie de commande à un système LTI quelconque. Il en résulte dans le cas général une commande à *structure variable*, et non plus nécessairement par modes glissants. De plus, l'approche utilisée permet d'avoir un minorant de la vitesse de convergence *globale*, là où le paragraphe précédent ne s'intéressait qu'à la convergence vers la surface de glissement. Enfin, la dernière partie présente une manière de rendre cette commande continue pour réduire le *chattering* après avoir montré pourquoi la plupart des méthodes classiques de réduction du *chattering* ne peuvent pas être appliquées telles quelles.

---

<sup>1</sup>Pour un système multi-entrées, l'ordre du système de référence est  $n - p$  avec  $p$  le nombre d'entrées

## 7.1 Modèle considéré

Dans ce chapitre, on ne considère que des systèmes *LTI monovariabiles incertains à pôles réels*, c.à.d vérifiant le théorème de Feldbaum. De plus, on suppose que toutes les incertitudes et perturbations sont *co-incidentes*.

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}([\Gamma_m; \Gamma_M]u + [-C; C]) \quad (7.1)$$

*Remarque 7.1.* Un système non linéaire tel que (2.1) peut être modélisé par un système LTI incertain. Il suffit d'approximer le terme  $\psi(\mathbf{x}, t)$  par une fonction multilinéaire de l'état :  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ . L'approximation doit être faite de manière à minimiser l'écart entre les deux dans le domaine physique dans lequel évolue l'état. La dernière ligne du système (2.1) devient alors

$$\dot{x}_n \in \mathbf{a}^T \mathbf{x} + [-C', C'] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u \quad (7.2)$$

avec  $[-C', C']$  les incertitudes tenant compte des incertitudes du modèle originel additionnées de celles provenant de la simplification du modèle.

*Remarque 7.2.* Si le système LTI considéré est une chaîne d'intégrateurs purs, c'est le système de référence pour la synthèse de lois de commandes d'ordre supérieur.

En posant la nouvelle entrée virtuelle telle que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v \quad (7.3)$$

on aboutit à un système parfaitement connu. Seule l'entrée est inconnue. En effet, elle contient tous les termes d'incertitude :

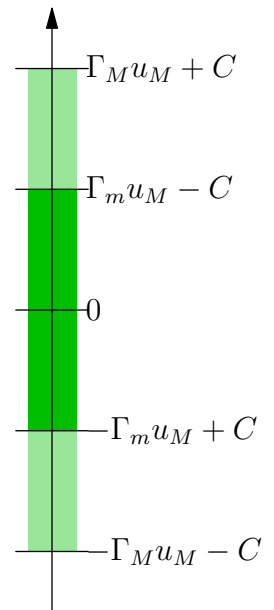
$$v \in [-C', C'] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u$$

Sa exacte valeur est inconnue, mais si l'amplitude de la commande  $u$  est suffisante pour compenser les incertitudes et perturbations, c.à.d que  $u_M > \Gamma_m^{-1}C'$  et que  $u$  ne prend que ses 2 valeurs extrêmes :  $+u_M$  et  $-u_M$ , on sait que

$$|v| \geq \Gamma_m u_M - C' > 0$$

Donc, une commande  $v$  d'amplitude inférieure à  $\Gamma_m u_M - C'$  est en théorie physiquement réalisable par filtrage de la commande commandant à haute fréquence (§2.2.1).

*Remarque 7.3.* Il n'est considéré ici que des commandes et perturbations *symétriques*, pour des raisons de clarté. Il est également possible de considérer des commandes ou perturbations dissymétriques, en exploitant le terme constant de l'expression (6.14). Tant que la commande permettant au système de rester sur l'objectif appartient au domaine des commandes admissibles, la seule différence est la difficulté de calcul de la surface de commutation à temps minimal.



## 7.2 Commande

La commande présentée dans ce chapitre est une commande à temps minimal, de par la forme de la surface de commutation. Mais l'amplitude de la commande équivalente pour laquelle la surface est calculée ne correspond pas à la commande réelle : elle est plus faible que cette dernière. La différence permet de rejeter les perturbations. Pour simplifier les notations, introduisons :

**Définition 7.1.** Appelons  $\mathcal{S}_{v_M}$  la surface de commutation à temps minimal pour le système (6.14) (ou (7.3)) calculée pour la commande d'amplitude  $[-v_M, v_M]$ .

On pose  $s_{v_M}(\mathbf{x})$  comme étant le signe de la commande associée pour l'état  $\mathbf{x}$ .

**Theorème 7.1.** *Considérons le système (7.1). La loi de commande*

$$u(\mathbf{x}) = -u_M s_{v_N}(\mathbf{x}) \quad (7.4)$$

avec  $s_{v_N}(\mathbf{x})$  défini par la Def. 7.1 et  $v_N$  étant un paramètre à régler tel que

$$0 < v_N \leq \Gamma_m u_M - C' \quad (7.5)$$

est une commande par modes glissants qui stabilise le système en l'origine en un temps fini. De plus, ce temps est majoré par le temps de convergence d'une commande à temps minimal qui contrôlerait le système nominal (7.3) par une commande d'amplitude  $v_N$ .

La preuve repose sur le Lem. 7.2, proche du Thm. 6.9, prouvant la dérivabilité de  $\tau_n(\mathbf{x})$  pour  $\tau_n(\mathbf{x}) \neq 0$ . Étant un lemme technique, il est exposé après la preuve principale pour ne pas alourdir la lecture.

*Démonstration.* La preuve consiste à trouver une fonction de Lyapunov prouvant que le système atteint la surface de commutation en temps fini et y reste. L'expression analytique de cette surface et les solutions formelles à l'équation d'état n'étant pas disponibles pour les ordres supérieurs (cf §6.4.3), il est très difficile de trouver une fonction de Lyapunov exprimée dans l'espace d'état.

Par contre, en se souvenant du Cor. 6.7, une caractérisation de la surface de commutation dans l'espace des séquences de commande à temps minimal est que la durée de la première phase  $\tau_n$  (cf Def. 6.3) est nulle. De plus,  $\tau_n(s, \mathbf{x})$  est dérivable pour  $\tau_n \neq 0$ , donc en dehors de la surface de glissement d'après le Lem. 7.2 exposé ci-après. Comme cette durée est tout le temps positive, elle fait une bonne fonction de Lyapunov candidate.

La première étape de la démonstration consiste à prouver que, pour un système nominal,  $\dot{\tau}_n = -1$  hors de la surface de commutation ; la deuxième étape, que  $\dot{\tau}_n \leq -1$  pour le système réel.

Dans le cas d'un système nominal contrôlé par une commande à temps minimal, la trajectoire  $\mathbf{x}(t)$  est parfaitement connue. Par définition de  $\tau_n$ ,

$$\tau_n(\mathbf{x}(t)) = \tau_n(t=0) - t$$

pendant la première phase de constance de la commande, autrement dit, jusqu'à  $\tau_n = 0$ . Donc,  $\dot{\tau}_n = -1$  dans cette phase, ce qui clôt la 1<sup>re</sup> étape de la preuve.

En suivant la même idée que [Eat62], étudions les directions de la commande  $v_N s_{v_N}(\mathbf{x})$ . Comme nous sommes dans le cas d'une commande à temps minimal parfaite,  $\mathbf{b}v_N s_{v_N}(\mathbf{x})$

est telle que  $\dot{\tau}_n$  décroît le plus vite possible. De plus,  $\dot{\tau}_n = \frac{\partial \tau_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\partial \tau_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} v_N s_{v_N}(\mathbf{x})$ , donc  $\frac{\partial \tau_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} s_{v_N}(\mathbf{x}) < 0$ .

Reprenons maintenant notre système *réel* et considérons les variations de la trajectoire  $\Delta \mathbf{x}$  par rapport au système nominal.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} v - (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} v_N s_{v_N}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{b} (v - v_N s_{v_N}(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{b} (|v| - v_N) s_{v_N}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Comme  $|v| \geq v_N$  d'après (7.5) et la définition de  $v$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_n &= \frac{\partial \tau_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\partial \tau_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} v \\ &= -1 + \frac{\partial \tau_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} (|v| - |v_{nom}|) s_{v_N}(\mathbf{x}) \\ &\leq -1 \end{aligned}$$

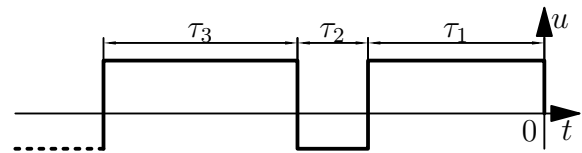
Donc,  $\tau_n(\mathbf{x})$  est une fonction de Lyapunov qui décroît au moins aussi vite que dans le cas nominal, donc en temps fini borné par  $\tau_n(t=0)$ .

Nous avons prouvé que la surface de commutation à temps minimal calculée pour l'amplitude de commande  $v_N$  est une surface de glissement, donc le système l'atteint en temps fini. La convergence en temps fini jusqu'à l'origine découle des propriétés de cette surface : il s'agit d'une famille de trajectoires du système commandée par une commande à temps minimal. Vu qu'en régime glissant, la dynamique d'un système est exactement celle imposée par la surface de glissement, le système suit une de ces trajectoires, donc atteint l'objectif  $\mathbf{0}$  en temps fini.  $\square$

*Remarque 7.4.* La condition donnée par l'Eq. (7.5) est une condition nécessaire, pas seulement suffisante, pour avoir un mode glissant. En effet, supposons que le système se trouve sur la surface de glissement à  $t = t_0$ . Dans le pire cas, quand  $|v| = K_m u_M - C < v_N$ , le système ne peut pas suivre la trajectoire correspondant à la commande d'amplitude  $v_N$ . La commande va saturer et le système quitter la surface : le régime glissant est perdu.

*Remarque 7.5.* En régime glissant, le système suit l'une des trajectoires correspondant à un système commandé par une commande à temps minimal d'amplitude  $v_N$  ayant au plus  $n - 1$  phases de constance de la commande. La commande équivalente de  $v$  est donc la séquence à temps minimal correspondant à la trajectoire en question.

Le fait que  $\tau_n(s, \mathbf{x})$  est dérivable, propriété fondamentale pour la démonstration du théorème précédent, vient du lemme suivant.



**Lemme 7.2.** *Considérons la fonction  $[x_1, \dots, x_n]^T = \mathbf{f}_n(s, \tau_1, \dots, \tau_n)$  définie par la Def. 6.4. Cette fonction est une bijection, et son inverse est dérivable aux points où  $\tau_n \neq 0$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $\mathbf{x}(s, \tau_1, \dots, \tau_n)$  est une bijection provient du Thm. 6.9.

Pour prouver la dérivabilité de son inverse, on peut utiliser le théorème des fonctions implicites. Pour les deux sous ensembles  $\tau_n > 0$  et  $\tau_n < 0$ , le signe  $s$  est constant, et

$\tau_i > 0 \forall i \in [1, n]$ , par définition de la séquence de commande. Si la matrice jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}$  est régulière, celle de l'inverse de  $\mathbf{x}(s, \tau_1, \dots, \tau_n)$ , est  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}^{-1}$ ,  $s$  étant considéré comme un paramètre constant.

Calculons d'abord  $\mathbf{x}(s, \tau_1, \dots, \tau_n)$  et ses dérivées partielles en utilisant le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 0 \\ \theta_1 &= \tau_1 \\ \theta_2 &= \tau_1 + \tau_2 \\ &\vdots \\ \theta_n &= \sum_{i=1}^n \tau_i\end{aligned}$$

tel que

$$\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$$

Les paramètres  $\theta_i$  représentent la durée restante jusqu'à convergence au  $i^e$  instant de commutation (en temps inverse).

En intégrant à rebours à partir de  $\mathbf{0}$ , l'état  $\mathbf{x}$  atteint par le système (7.3) commandé par la séquence  $(s, \tau_1, \dots, \tau_n)$  est

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_{j-1})} \int_0^{\theta_j - \theta_{j-1}} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{b}v$$

Comme  $\mathbf{A}$  et  $e^{\mathbf{A}}$  commutent et que

$$\mathbf{A} \int_0^\tau e^{\mathbf{A}t} dt = e^{\mathbf{A}\tau} - \mathbf{I}$$

les dérivées partielles par rapport à  $\theta_j$  sont, pour  $j < n$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta_j} &= (-1)^{j-1} e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_{j-1})} e^{\mathbf{A}(\theta_j - \theta_{j-1})} \mathbf{b}v \\ &\quad + (-1)^j \mathbf{A} e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} \int_0^{\theta_{j+1} - \theta_j} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{b}v \\ &\quad + (-1)^j e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} (-e^{\mathbf{A}(\theta_{j+1} - \theta_j)}) \mathbf{b}v \\ &= (-1)^{j-1} \left[ e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} \mathbf{b}v \right. \\ &\quad \left. - e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} (e^{\mathbf{A}(\theta_{j+1} - \theta_j)} - \mathbf{I}) \mathbf{b}v \right. \\ &\quad \left. + e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} e^{\mathbf{A}(\theta_{j+1} - \theta_j)} \mathbf{b}v \right] \\ &= (-1)^{j-1} 2e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} \mathbf{b}v\end{aligned}$$



et pour  $\theta_n$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \theta_n} &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (-\mathbf{A}) e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_{j-1})} \int_0^{\theta_j - \theta_{j-1}} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{b}v \\
&\quad + (-1)^{n-1} e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_{n-1})} e^{\mathbf{A}(\theta_n - \theta_{n-1})} \mathbf{b}v \\
&= e^{-\mathbf{A}\theta_n} \sum_{j=1}^i (-1)^j e^{\mathbf{A}\theta_{j-1}} (e^{\mathbf{A}(\theta_j - \theta_{j-1})} - \mathbf{I}) \mathbf{b}v \\
&\quad + (-1)^{n-1} \mathbf{I} \mathbf{b}v \\
&= e^{-\mathbf{A}\theta_n} \left[ \sum_{j=1}^n (-1)^j e^{\mathbf{A}\theta_j} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j e^{\mathbf{A}\theta_j} \right] \mathbf{b}v \\
&\quad + (-1)^{n-1} \mathbf{I} \mathbf{b}v \\
&= \left[ e^{-\mathbf{A}\theta_n} + (-1)^n e^{-\mathbf{A}\theta_n} e^{\mathbf{A}\theta_n} + \right. \\
&\quad \left. 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} + (-1)^{n-1} \mathbf{I} \right] \mathbf{b}v \\
&= \left[ e^{-\mathbf{A}\theta_n} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_j)} \right] \mathbf{b}v
\end{aligned}$$

D'après le Lem. 6.6, les vecteurs  $e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_{n-1})} \mathbf{b}$ ,  $e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_{n-2})} \mathbf{b}$ ,  $\dots$ ,  $e^{-\mathbf{A}(\theta_n - \theta_1)} \mathbf{b}$ ,  $e^{-\mathbf{A}\theta_n} \mathbf{b}$  sont linéairement indépendants. Les dérivées partielles  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_j}$ ,  $j \in [1; n]$  sont donc linéairement indépendantes, ce qui signifie que la matrice jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}$  est régulière.  $\square$

### 7.2.1 Modes glissants d'ordre supérieur

La commande présentée précédemment est non seulement une commande par modes glissants d'ordre  $n$  *idéale*, car elle fait converger le système à l'origine *en temps fini*, mais aussi d'ordre  $n$  *réel*.

On considère des systèmes LTI sous forme canonique de commandabilité (2.1)-(7.2) observés par un dérivateur de précision asymptotiquement optimale §3.3, comme le dérivateur de Levant. Ils sont sujets à l'erreur de mesure  $\epsilon$  amplifiée par l'observateur et à un retard de la commande  $\theta$ .

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n a_i x_i + |v| s_{v_M}(\mathbf{x}(t - \theta) + \epsilon)
\end{aligned} \tag{7.6}$$

où  $\mathbf{x}$  est l'état réel et  $\mathbf{x} + \epsilon$  l'état estimé incluant l'erreur de mesure et d'observation. Vu que l'état est observé grâce à un dérivateur asymptotiquement optimal,

$$\epsilon = [\mathcal{O}(\theta^n) \ \mathcal{O}(\theta^{n-1}) \ \dots \ \mathcal{O}(\theta)]^T$$

**Theorème 7.3.** *La loi de commande présentée au Thm. 7.1 est un mode glissant d'ordre  $n$  réel. C'est à dire, l'état  $\mathbf{x}$  converge vers un voisinage de l'origine tel que*

$$\mathbf{x} = [\mathcal{O}(\theta^n)\mathcal{O}(\theta^{n-1}) \dots \mathcal{O}(\theta)]^T$$

*si le système est exprimé sous forme canonique de commandabilité (7.6).*

*Démonstration.* La preuve se divise en quatre étapes : étude de l'effet des retards seuls, de l'erreur de mesure seule, de la forme de la surface de glissement pour finir par une conclusion intégrant les 3 résultats partiels précédents.

L'ensemble des retards  $\theta$  donne une précision asymptotique de mode glissant d'ordre  $n$ , d'après le Lem. 3.7.

Le §3.4.2 indique que si l'on ne considère que l'effet des erreurs de mesure et d'observation, l'état peut atteindre la zone  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des valeurs possibles de  $\epsilon$ , donc  $\mathcal{E} = [\mathcal{O}(\epsilon) \ \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \ \dots \ \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n-1}}) \ \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n}})]^T$ , ce qui est compatible avec la précision asymptotique voulue.

Mais il reste à prouver que la forme de la surface de glissement  $\mathcal{S}$  permet la précision asymptotique d'ordre  $n$ . En exploitant le Cor. 6.7, la commande à temps minimal amenant le système de l'origine 0 à un point de la surface de glissement en temps inverse peut être paramétrée par (cf. Def. 6.3)

$$(s, k_1\tau, k_2\tau, \dots, k_{n-1}\tau, 0) \tag{7.7}$$

où  $\tau > 0$  est le temps total de convergence (dans le cas nominal) et  $k_i \geq 0$  tel que  $\sum_{i=1}^{n-1} k_i = 1$  est la proportion du temps passé dans la phase  $i$ .

Intégrer le système (7.6) commandé par cette séquence (7.7) en temps inverse permet de montrer qu'il existe des fonctions  $\alpha_i(s, v_M, k_2, \dots, k_{n-1})$  telles que

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i(s, v_M, k_2, \dots, k_{n-1})\tau^{n+1-i} + \mathcal{O}(\tau^{n+2-i}) \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n a_i x_i + |v|s_{v_M}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\tau) + |v|s_{v_M}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Les termes  $\mathcal{O}(\tau^{n+2-i})$  sont négligeables devant  $\alpha_i\tau^{n+1-i}$  dans un voisinage de l'origine. Comme  $\alpha_i$  est borné pour toutes valeurs de  $s$ ,  $v_M$  et  $k_i$ , pour  $\tau$  suffisamment petit,  $\mathbf{x}_S = [\mathcal{O}(\tau^n)\mathcal{O}(\tau^{n-1}) \dots \mathcal{O}(\tau)]^T$ . La surface de glissement est donc proche de l'homogénéité pour des poids de mode glissant d'ordre  $n$  dans un voisinage de l'origine. Si le système considéré est une chaîne d'intégrateurs pure,  $a_i = \alpha_i = 0 \ \forall i$ . La surface est donc homogène. La perte d'homogénéité est due aux termes  $a_i x_i$  qui deviennent négligeables près de  $\mathbf{x} = 0$ .

En conclusion, la forme de la surface de glissement près de l'origine permet à l'erreur due aux erreurs de mesure et d'observation d'être du type  $[\mathcal{O}(\epsilon) \ \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \ \dots \ \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n-1}}) \ \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{n}})]^T$ . Comme l'effet des retards conserve la précision asymptotique d'ordre  $n$ , la loi de commande est un mode glissant d'ordre  $n$  réel. Le système commandé converge vers un voisinage de l'origine de la forme  $\mathbf{x} = [\mathcal{O}(\theta^n)\mathcal{O}(\theta^{n-1}) \dots \mathcal{O}(\theta)]^T$ .  $\square$

### 7.2.2 Exemple : triple intégrateur

L'algorithme de commande par modes glissants d'ordre 2 connue sous le nom de mode glissant d'ordre deux avec loi de convergence imposée [EKL96] est un exemple de cette

loi de commande avec un double intégrateur comme modèle de référence. Nous reprenons ici l'exemple de [BP09a], dont le modèle de référence est un triple intégrateur :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &\in [-C; C] + u\end{aligned}\tag{7.8}$$

L'équation de la surface de commutation à temps minimal et de la commande associée est donnée au §6.4.3 (triple intégrateur) pour un système normé.

La commande s'écrit

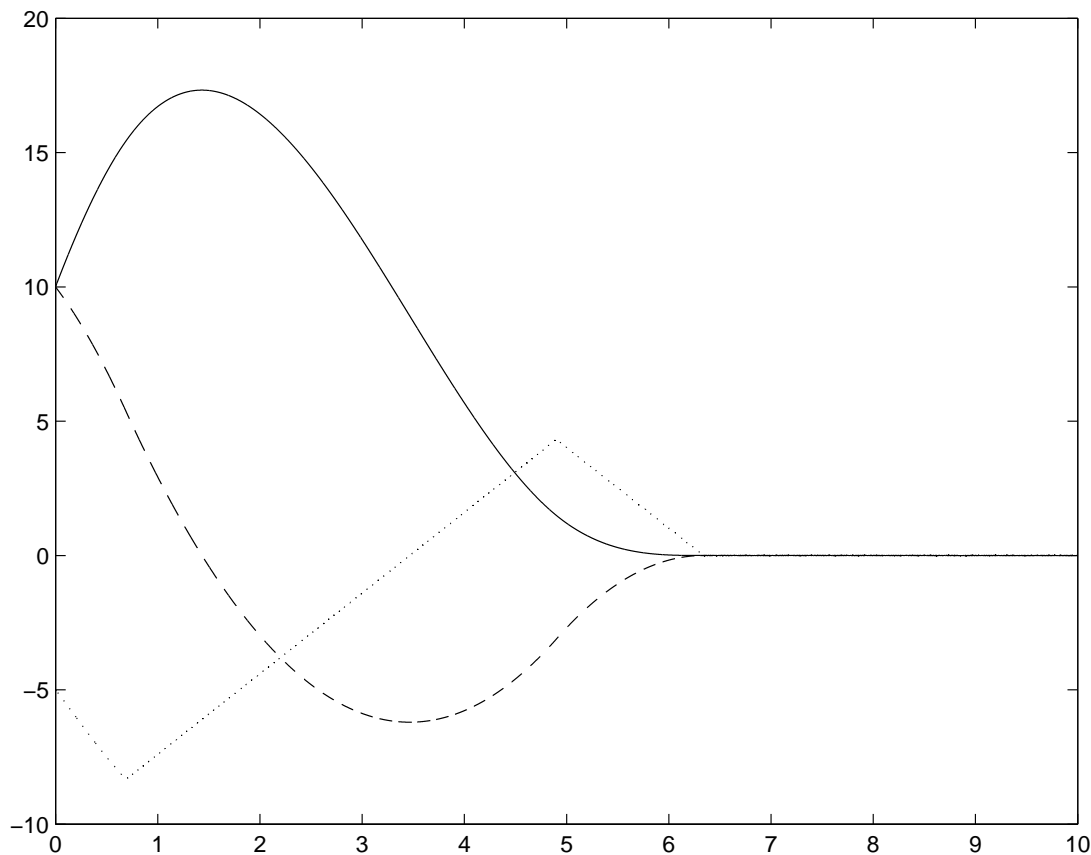


FIG. 7.1 – Variables d'état  $x_1$  (—),  $x_2$  (---) et  $x_3$  (...) en fonction du temps (sec).

Les simulations ont été faites avec  $C' = 2$ , la perturbation associée étant un bruit blanc d'amplitude maximale 2, et aucune incertitude sur le gain ( $\Gamma_m = \Gamma_M = 1$ ). La commande  $u$  a une amplitude de  $u_M = 5$ . La condition (7.5) impose  $v_N \leq K_m u_M - C = 3$ . La valeur  $v_N = 3$  a été choisie. Cela donne finalement la commande

$$v = -5 \operatorname{sign} \left( \frac{x_1}{3} - x_1 s \left( \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3} \right) \right)\tag{7.9}$$

La Fig. 7.1 montre qu'après la phase de convergence sur la surface de glissement<sup>2</sup>, où le système est soumis aux perturbations, les trajectoires des variables d'état sont exactement celles d'un triple intégrateur soumis à une commande à temps minimal d'amplitude 2.

<sup>2</sup>Cette phase s'arrête à la première commutation de la commande

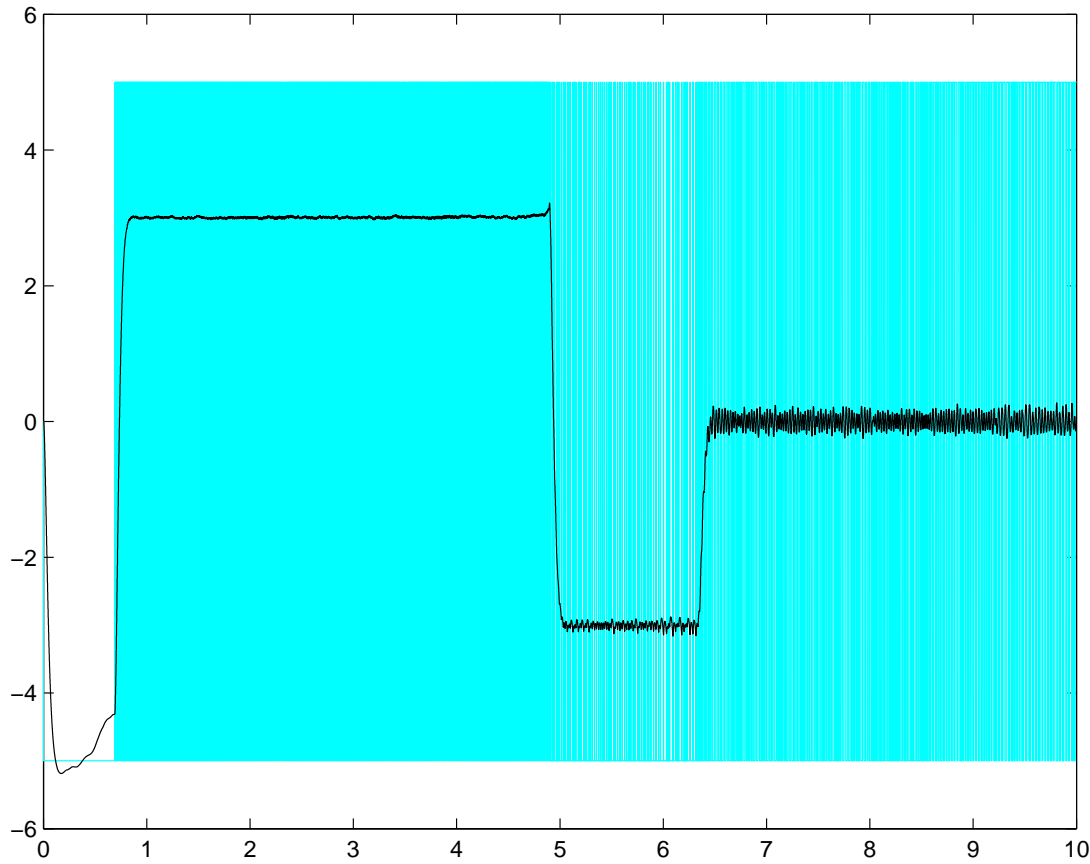


FIG. 7.2 – Commande  $u$  (gris) et commande équivalente de  $v$ ,  $v_{eq}$  (noir) en fonction du temps (sec).

La Fig. 7.2 illustre la Rem. 7.5. La commande équivalente de  $v$  est obtenue par filtrage par un filtre passe bas du second ordre de fréquence de coupure ajustée pour montrer un phénomène d'augmentation de la période du *chattering* pendant la dernière phase. Cette commande équivalente est égale à la commande équivalente, aux artefacts de filtrage près.

## 7.3 Systèmes oscillants et commande à structure variable

Les systèmes linéaires ne satisfaisant pas le théorème de Feldbaum ne peuvent pas être utilisés comme base pour une commande par modes glissants, car la surface de commutation à temps minimal n'est pas une trajectoire du système, comme l'a montré l'exemple de l'oscillateur parfait au §6.4.3, ce dernier ne peut donc pas glisser dessus. Cela n'exclut cependant pas d'utiliser la même idée pour adapter la commande à temps minimal pour en faire une commande robuste. La commande obtenue ne sera pas une commande par modes glissants, mais une commande à *structure variable*.

On considère ici le même système linéaire temporellement invariant (7.3) que précédemment, à la différence près qu'il n'y a plus aucune restriction sur le placement des pôles.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v \quad (7.10)$$

avec

$$v = [-C, C] + [\Gamma_m, \Gamma_M]u$$

Le Thm. 7.1 se généralise en :

**Theorème 7.4.** *La loi de commande*

$$u(\mathbf{x}) = -u_M s_{v_N}(\mathbf{x})$$

avec  $s_{v_N}(\mathbf{x})$  défini comme Def. 7.1 et  $v_N$  étant un paramètre à régler tel que

$$0 < v_N \leq \Gamma_m(\mathbf{x}, t)u_M - C(\mathbf{x}, t)$$

est une commande à structure variable qui stabilise le système (7.10) en l'origine en un temps fini. De plus, ce temps est majoré par le temps de convergence d'une commande à temps minimal qui contrôlerait le système nominal (7.3) par une commande d'amplitude  $v_N$ .

*Démonstration.* La preuve s'inspire du principe d'optimalité de Bellman, bien qu'elle s'appuie techniquement sur le principe du minimum de Pontryagin. Supposons que l'amplitude de la commande  $v$  puisse être supérieure à  $v_N$  jusqu'au temps  $\delta t$ , et égale à  $v_N$  après.

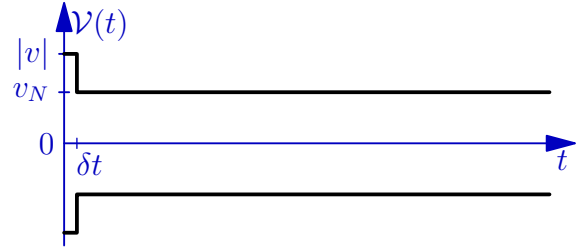


FIG. 7.3 – Allure de la commande considérée

Deux cas sont possibles :

- Soit l'état initial se situe sur la surface de commutation. Dans ce cas, la commande à l'instant  $t = 0$  n'a aucune influence, tant que son amplitude reste finie (car à ce moment,  $\lambda(t)^T \mathbf{b} = 0$ ). Si le système est dans un mode glissant, l'amplitude de la commande ne change rien à la trajectoire du système, tant qu'elle est suffisante pour maintenir le système sur la surface. Si l'amplitude est trop faible, le système quitte la surface, et le mode glissant par la même occasion. Si le système n'est pas en mode de glissement, il suffit d'attendre un temps infiniment court pour que l'état quitte la surface de commutation et que le système ne se trouve plus sur la surface, ce qui nous amène au deuxième cas possible.
- Soit l'état initial se situe hors de la surface de commutation. On suppose que  $\delta t$  est suffisamment court pour qu'aucune commutation n'ait lieu pendant l'intervalle  $[0, \delta t[$ .

Avant  $\delta t$ , l'application d'une commande d'amplitude  $v_N$  n'est pas optimale, car elle ne satisfait pas l'équation de commande du principe du minimum de Pontryagin (Comme il n'y a pas de commutation,  $\lambda(t)^T \mathbf{b} \neq 0$  pendant  $]0, \delta t[$ ). Il existe donc une commande admissible faisant converger le système vers 0 plus rapidement.

Or, appliquer la commande pour  $|v|$  maximum (supérieur à  $v_N$ ) satisfait le principe du minimum. Après  $\delta t$ , la commande est optimale jusqu'à l'objectif 0, car  $|v| = v_N$ . La commande d'amplitude  $|v|$  maximum jusqu'au temps  $\delta t$ , puis d'amplitude  $v_N$  est donc à temps minimal, étant donné les contraintes imposées, et est plus rapide que la commande d'amplitude  $v_N$  constante.

La commande étant en boucle fermée, la réitération de ce raisonnement à chaque instant (pour décider de la commande à appliquer à chaque instant) prouve le théorème.

Ce théorème ne prouve pas l'existence d'un mode glissant, uniquement d'une commande à structure variable, qui est néanmoins robuste et converge en temps fini. Mais

il prouve un résultat global intéressant même pour les systèmes à pôles réels : le temps total de convergence du système réel est majoré par le temps de convergence du système nominal soumis à la commande nominale. Le Thm. 7.4 ne prouvait que la majoration du temps de convergence vers la surface de glissement, pas celui de la globalité de la trajectoire.

## 7.4 Réduction du *chattering*

Revenons aux systèmes à pôles réels. La commande exposée dans le Thm. 7.1 a un inconvénient important : le *chattering*. Cette commande convergeant très rapidement, elle est très sensible au moindre retard. De plus, la commande équivalente est discontinue par rapport au temps ainsi qu'à l'espace, car certaines commutations de la commande interviennent alors que le système est en mode de glissement (pour un ordre supérieur à 2). Les méthodes classiques de réduction du *chattering* comme les méthodes de couche limite (adoucissement de la fonction sign) ou filtrage pour ne garder que la commande équivalente ne sont donc pas utilisables telles quelles.

Une méthode qui peut être mise à profit est l'augmentation de l'ordre du système, en considérant la commande réelle comme une variable d'état dont on commande la dérivée. Elle requiert néanmoins l'estimation en temps réel d'une dérivée supplémentaire de la sortie, ainsi que le calcul d'une surface de commutation à temps minimal d'ordre plus élevé. Cette section propose une alternative basée sur le *super twisting* pour éviter d'avoir à estimer une dérivée supplémentaire.

La valeur nominale (sans perturbation) de la commande réelle si l'on augmente l'ordre du système est continue par rapport au temps. Elle peut donc être utilisée sans engendrer de *chattering*. Si le système nominal est une chaîne d'intégrateurs pure, cette commande nominale est celle calculée par les algorithmes présentés au §6.5. La commande nominale traitant la dynamique nominale, il reste à rejeter les perturbations. Cela peut se faire grâce à l'algorithme du *super twisting*.

L'étude d'un système d'ordre 1, d'état  $x_1$ , est intéressante à plus d'un titre. Elle permet non seulement d'illustrer les explications précédentes de manière simple, mais donne aussi des clés pour le réglage d'une telle commande. La commande à temps minimal d'un tel système est  $u = -u_M \text{sign}(x_1)$ . On suppose pour simplifier l'explication que le gain de la commande  $[\Gamma_m, \Gamma_M]$  est constant et unitaire.

Si l'on étend le système, c'est à dire que l'on considère  $u$  comme une variable d'état et que l'on commande  $\dot{u}$  par la commande précédente calculée pour un double intégrateur, le système commandé devient

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u + p(t) \\ \dot{u} &= (C + v_N) \text{sign} \left( u + \sqrt{2v_N} \sqrt{|x_1|} \text{sign}(x_1) \right)\end{aligned}$$

avec  $p(t)$  la perturbation continue ayant une constante de Lipschitz inférieure à  $C$ .  $v_N$  est la commande nominale du système étendu (d'ordre 2). C'est la dérivée nominale de la commande. L'amplitude  $(C + v_N)$  de la commande provient de la condition (7.5). Comme mentionné précédemment, c'est une technique efficace si l'on peut estimer la dérivée de  $x_1$  en temps réel.

Mettons maintenant en place la "commande nominale + *super twisting*" permettant de se passer de l'estimation de la dérivée. Appliquer uniquement la commande nominale

conduirait à

$$\dot{x}_1 = u - \sqrt{2v_N} \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) + p(t)$$

qui ferait converger le système vers l'origine en temps fini en l'absence de perturbations, mais ne pourrait rejeter efficacement ces dernières.

En ajoutant finalement l'algorithme du *super twisting* pour contrecarrer les effets de la perturbation, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - \sqrt{2v_N} \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) - \lambda_1 \sqrt{C} \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) + p(t) \\ \dot{u} = -\lambda_2 C \operatorname{sign}(x_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = u - \left( \sqrt{2v_N} + \lambda_1 \sqrt{C} \right) \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) + p(t) \\ \dot{u} = -\lambda_2 C \operatorname{sign}(x_1) \end{cases}$$

Ce qui n'est rien d'autre qu'un *super twisting*. On a donc une autre interprétation de l'algorithme du *super twisting* seul : le terme  $\lambda_1 \sqrt{C} \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1)$  pourrait être vu comme la commande nominale d'une commande à temps minimal d'un double intégrateur pur, le terme intégral n'étant là que pour la robustesse. Ce point de vue ne permet pas d'expliquer le fonctionnement du *super twisting*, car l'interaction entre le terme intégral et le terme algébrique est assez subtil, comme vu au §3.7. De plus, pour commander un système d'ordre supérieur, la commande nominale n'est plus d'exposant 1/2 (pour une chaîne d'intégrateurs purs, il est d'exposant  $\frac{n-1}{n}$  pour des raisons d'homogénéité), ce qui rend son analyse complexe. Par contre, il permet de voir que la commande nominale contribue à l'amortissement des oscillations du *super twisting*, détail utile pour le réglage de la commande présentée ici.

Intéressons nous maintenant au cas général d'ordre  $n$ . On va commander le système LTI à pôles réels sous forme canonique de commandabilité :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \gamma(t)u + p(t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{7.11}$$

où  $p(t)$  est une perturbation continue et de constante de Lipschitz  $C$  et  $\gamma(t)$  le gain de la commande, inconnu, mais continu de constante de Lipschitz  $L_\gamma$  et borné tel que  $0 < \Gamma_m \leq \gamma(t) \leq \Gamma_M$ . On suppose pour simplifier que le système est mis à l'échelle de manière à ce que la moyenne géométrique des bornes de  $\Gamma$   $\Gamma_m \Gamma_M = 1$ . Cela est toujours possible d'après le §6.2.1.

**Theorème 7.5.** *La commande constituée de :*

- la commande nominale  $u_{nom}$  calculée comme l'état  $u$  du système (7.11) étendu par un intégrateur pur et commandé par une commande à temps minimal d'amplitude  $v_N$ ,
- un *super twisting* de coefficients  $L = \frac{C + L_\gamma v_N}{\Gamma_m}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1.1$  et de variable de glissement la différence entre la valeur réelle de  $x_n$  et sa valeur théorique  $x_{n_{nom}}(x_1, \dots, x_{n-1})$  si le système était commandé par la commande nominale sans perturbation

stabilise le système (7.11) à l'origine en temps fini. De plus, la commande réellement appliquée au système est continue et de constante de Lipschitz

*Démonstration.* Étudions le système (7.11) soumis à la commande nominale seule

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \gamma(t)u_{nom}(\mathbf{x}) + p(t) \\ \Leftrightarrow \dot{x}_n - \mathbf{a}^T \mathbf{x} - u_{nom}(\mathbf{x}) &= (\gamma(t) - 1)u_{nom}(\mathbf{x}) + p(t) \\ \Leftrightarrow \dot{x}_n - \dot{x}_{n_{nom}}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= (\gamma(t) - 1)u_{nom}(\mathbf{x}) + p(t)\end{aligned}$$

En posant  $\sigma = x_n - x_{n_{nom}}(x_1, \dots, x_{n-1})$ , l'équation précédente devient

$$\dot{\sigma} = (\gamma(t) - 1)u_{nom}(\mathbf{x}) + p(t)$$

Autrement dit, il s'agit d'un intégrateur soumis à une perturbation continue de constante de Lipschitz  $L_\gamma v_N + C$ . On s'est donc ramené au cas du §3.5.3, avec une perturbation d'amplitude  $L_\gamma v_N + C$ . En ajoutant l'algorithme du *super twisting* réglé suivant la preuve originelle de Levant et dont la variable de glissement est  $x_n - x_{n_{nom}}(x_1, \dots, x_{n-1})$ , on peut compenser la perturbation.  $\square$

*Remarque 7.6.* Comme indiqué précédemment, il n'est pas forcément nécessaire d'avoir un coefficient  $\lambda_1$  très élevé, contrairement à l'algorithme du *super twisting* utilisé seul, car l'ajout de la commande nominale a un effet stabilisant, et tend à réduire les oscillations. Par contre, il faut que le *super twisting* seul reste stable, spécialement si l'amplitude de la commande nominale  $v_N$  est faible par rapport aux perturbations (*c.à.d* si son effet stabilisateur est faible).

### 7.4.1 Exemple : Double intégrateur

L'algorithme de réduction du *chattering* par l'utilisation du *super twisting* a été testé en simulation. Le système à commander est double intégrateur soumis à une dynamique négligée et à une perturbation co-incidente. La dynamique négligée est linéaire d'ordre 1 et de constante de temps 10ms, et la perturbation co-incidente est sinusoïdale de pulsation 1Hz et d'amplitude  $0.8/(2\pi)$ , pour avoir une constante de Lipschitz de 0.8.

L'amplitude nominale de la commande à temps minimal  $v_N$  est fixée à 2, la constante de Lipschitz du *super twisting*, à la même valeur que celle des perturbations, à savoir 0.8. Les coefficients du *super twisting* sont réglés suivant la remarque précédente et la preuve de stabilité originelle de Levant, ce qui donne  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 1.1$ .

Les valeurs équivalentes de la commande réelle ainsi que de la commande virtuelle présentées Fig. 7.5 sont obtenues par filtrage, par un filtre du 2<sup>e</sup> ordre de pulsation de coupure  $\omega_0 = 40\text{rad/s}$ .

On voit que la sortie présente des oscillations, contrairement à une commande à temps minimal simple, mais en contrepartie, l'amplitude de la commande, et notamment ses composantes haute fréquence, sont nettement plus faibles en régime permanent. On peut aussi constater que  $v_{eq}$  est proche de 0 en régime permanent (après convergence), car  $u_{eq}$  forme quasiment l'opposé de la perturbation, conformément à la Rem. 7.5. Par contre,  $v_{eq}$  est très différent d'une commande à temps minimal d'amplitude 2 avant la convergence, à cause de l'effet du *super twisting*, essayant de compenser les perturbations même quand le système est encore loin de la convergence.



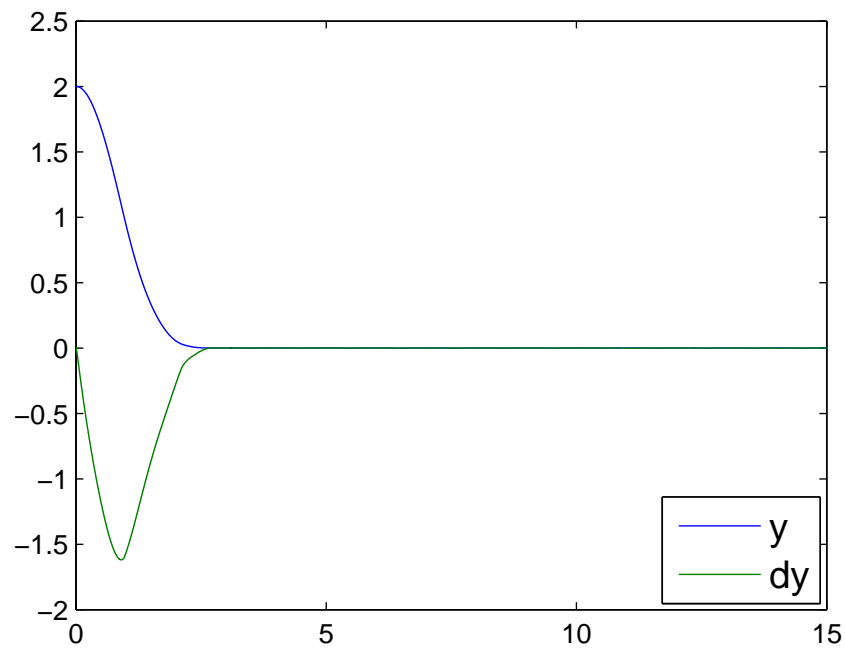
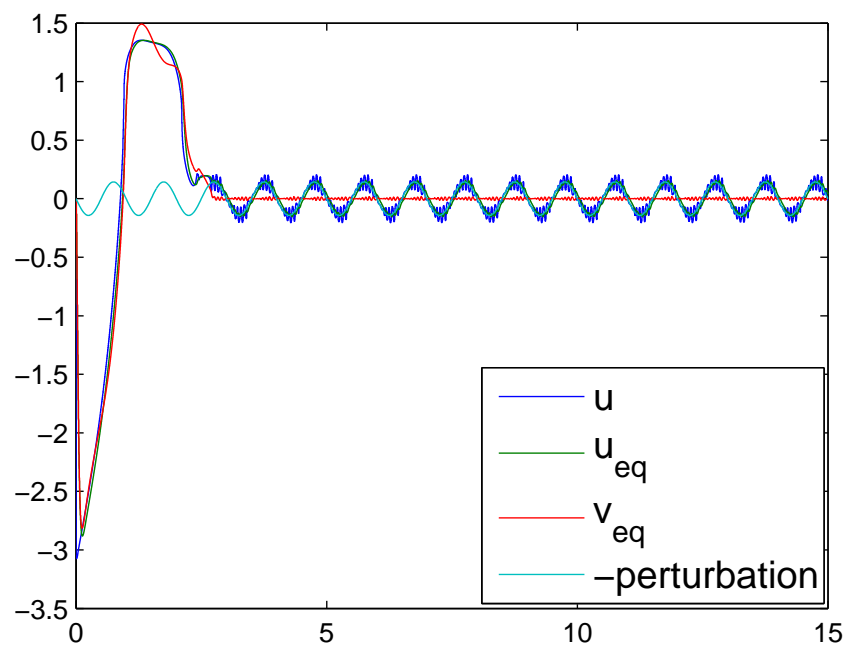


FIG. 7.4 – Erreur en sortie et en sa dérivée en fonction du temps (sec)

FIG. 7.5 – Commande réelle  $u$ , commandes équivalentes de la commande réelle  $u_{eq}$  ainsi que de la commande virtuelle  $v_{eq}$ , et opposé de la perturbation.

## 7.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté une commande par modes glissants d'ordre supérieur issu d'une idée simple : une famille de trajectoires du système qui converge vers l'origine de l'espace d'état et qui forme une hypersurface divisant l'espace d'état en deux est potentiellement une surface de glissement. Le théorème de Feldbaum permet de créer une telle famille de trajectoires pour les systèmes de référence linéaires à pôles réels. Il suffit que la surface de commutation à temps minimal soit calculée pour une commande nominale d'amplitude suffisamment faible pour qu'elle soit aussi une surface de glissement. La commande engendrée possède donc les propriétés de robustesse des commandes par modes glissants, ainsi qu'une précision asymptotique de mode glissant d'ordre supérieur réel. Cela permet de l'appliquer sur des systèmes quelconques (non linéaires par exemple). Elle hérite également de la vitesse de convergence des commandes à temps minimal : bien réglée, elle assure la vitesse de convergence la plus rapide possible dans le cas où les perturbations sont les pires. La même approche est également utilisable pour des systèmes de référence LTI quelconques, la commande obtenue est alors à structure variable, sans être forcément par modes glissants, mais elle conserve les propriétés de convergence rapide et robuste. Enfin, même s'il est impossible de réduire le *chattering* d'une telle commande par des moyens conventionnels, la dernière partie a montré que cela était possible moyennant d'étendre le système ou de modifier la commande pour utiliser un algorithme de type *super twisting*.



# Chapitre 8

## Conclusion et perspectives

Ce travail a commencé par introduire les notions de base des commandes par modes glissants et par modes glissants d'ordre supérieur, en distinguant certaines notions souvent confondues, comme commande *équivalente* et commande *nominale*, ou mode glissant d'ordre supérieur *idéal* ou *réel*. Il a ensuite présenté une preuve originale de convergence de l'algorithme du *super twisting*, intermédiaire entre la preuve originelle numérique, donnant les coefficients les plus petits assurant la convergence, mais difficilement applicables à d'autres lois de commande, et les preuves basées sur des fonctions de Lyapunov, plus facilement adaptables à des algorithmes proches, mais ne prouvant la convergence que pour des coefficients élevés générant un fort *chattering*.

Le quatrième chapitre a présenté la plate forme d'essais électropneumatique de l'IRC-CyN. Après une présentation générale des technologies employées, il a proposé un modèle complet de simulation, ainsi qu'un modèle simplifié de synthèse d'observateurs ou de lois de commande. Les deux principaux intérêts de ce banc d'essais sont :

- la possibilité de tester des observateurs ou des lois de commande mono ou multivariable,
- la possibilité de tester la robustesse des lois de commandes implantées, grâce à un vérin identique au précédent, générant un effort extérieur perturbateur pouvant avoir une amplitude comme une dynamique comparables au vérin principal.

Un simulateur permet de valider les observateurs ou lois de commande avant de les implanter telles quelles sur le banc d'essais, ce qui accélère le développement.

Le cinquième chapitre a proposé un moyen de réduire le *chattering* en rendant adaptative l'amplitude de la commande discontinue. Cette amplitude est augmentée quand le système est en dehors d'un voisinage de la surface de glissement, et diminuée dans le cas contraire. La taille de ce voisinage varie lui aussi dans le temps en fonction d'un majorant de l'amplitude du *chattering*. Une étude du pire cas a permis de donner des bornes peu conservatives de l'erreur en régime glissant, ainsi que de proposer une amélioration au premier algorithme présenté pour réduire cette erreur.

Le sixième chapitre, à l'instar des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>, a exposé les notions fondamentales d'une théorie, en l'occurrence la commande à temps minimal. Le problème traité dans ce chapitre est celui de trouver la commande permettant à un système parfaitement connu d'atteindre un objectif en temps minimal. Après une présentation des résultats généraux, le cas particulier des systèmes linéaires à pôles réels a été traité, et le théorème de Feldbaum introduit. Il permet d'une part de permettre de calculer facilement la surface de commutation à temps minimal, un algorithme pour les calculer numériquement est d'ailleurs proposé, et d'autre part, il permet de montrer que la surface de commutation est aussi une surface

de glissement.

Cette propriété est généralisée dans le dernier chapitre au cas de systèmes incertains pour proposer une commande par modes glissants dont la surface de glissement est une surface de commutation à temps minimal. Cette commande est d'ordre supérieur, réel comme idéal, et possède donc toutes les propriétés de robustesse. Elle hérite également de la vitesse de convergence des commandes à temps minimal : bien réglée, elle assure la vitesse de convergence la plus rapide possible dans le cas où les perturbations sont les pires. Il est également montré que dans le cas de systèmes LTI quelconques, la commande obtenue par cette méthode n'est plus nécessairement par modes glissants, mais à structure variable. Elle n'en conserve pas moins sa vitesse de convergence et sa robustesse. Même si les techniques classiques de réduction du *chattering* ne peuvent pas s'appliquer à cette commande, il est possible de la modifier pour pouvoir profiter de la réduction de *chattering* d'un *super twisting*.

## 8.1 Perspectives

De nombreuses pistes restent à explorer ou améliorer, aussi bien du point de vue théorique que pratique. On peut citer :

- généraliser les techniques d'adaptation de l'amplitude de la commande à des lois de commande d'ordre supérieur,
- généraliser le corollaire 6.10 pour permettre de calculer des surfaces de commutation à temps minimal dans d'autres configurations que la forme canonique de commandabilité ou la forme modale,
- chercher les meilleures transformations et normes à utiliser pour le calcul de la surface de commutation à temps minimal homogène,
- étendre les lois de commande issues de l'hybridation entre commande à temps minimal et commande par modes glissants à des systèmes de référence non linéaires,
- rechercher les meilleures trajectoires à utiliser pour la moyenne des pressions, notamment pour minimiser la consommation d'air comprimé.

# Annexe A

## Un observateur par modes glissants

Une bonne loi de commande par retour d'état nécessite un bon observateur si tout l'état n'est pas mesuré. Une méthode classique de synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires se base sur la théorie des modes glissants dont les propriétés principales sont la robustesse vis à vis des incertitudes et variations de paramètres, son principal défaut étant le *chattering*.

Alors que les observateurs pour les systèmes linéaires incertains ont été étudiés de manière assez complète [ES98, UGJ99, FLD07], le problème pour les systèmes non linéaires reste ouvert bien qu'il existe déjà des approches basées sur les modes glissants. Un point commun de la plupart des solutions est que leur conception requiert une transformation du système sous sa forme canonique d'observabilité ou du moins sous une forme triangulaire. Une approche dite *step-by-step* (pas à pas) a été proposée dans [BB98, FB07]. Le terme correctif basé sur l'algorithme du *twisting* ou *super twisting* assure la convergence en temps fini de l'erreur d'estimation vers 0. L'idée fondamentale de cet observateur de systèmes triangulaires est de s'assurer de la convergence de chaque variable d'état l'une après l'autre, mais le nombre élevée de ses paramètres rend son réglage relativement fastidieux. Un observateur hiérarchique [BFP07] reprenant le même principe mais basé sur l'algorithme du *super twisting* a également été appliqué aux robots bipèdes [LAP07].

Dans [FSEXG08, LAPF08], les observateurs utilisent des dérivateurs à convergence en temps fini [Lev03]. Comme les précédents, ils sont basés sur la forme canonique d'observabilité alors que le but est d'obtenir l'état sous la forme originelle. Il faut donc exprimer l'état de la forme canonique sous la forme originale. Il y a pour ce faire deux possibilités : soit multiplier le terme de correction par l'inverse de la matrice jacobienne, soit calculer la transformation d'état inverse. En pratique, ce dernier calcul est souvent difficile voire impossible analytiquement, ce qui explique la préférence générale pour la première solution.

De plus, les précédentes stratégies d'observation prennent rarement en compte des perturbations et incertitudes non coïncidentes (*unmatched*). La plupart des observateurs robustes basés sur d'autres principes que les modes glissants requièrent au moins autant de capteurs que de perturbations [XS01], ou n'acceptent que des perturbations dont la structure est connue à l'avance [CC07].

Ce chapitre présente une stratégie d'observation de systèmes non linéaires par modes glissants originale. Elle consiste à transformer le problème d'observation en un problème de commande : faire suivre une trajectoire par le modèle du système, cette trajectoire étant la sortie mesurée. La commande assurant ce suivi de trajectoire est une commande par modes glissants d'ordre 1 avec trajectoire précalculée [PGL08], cette dernière fixant

*a priori* le temps de convergence. Un dérivateur de Levant [Lev03] fournit l'estimation des dérivées successives nécessaires à la commande. Cette stratégie d'observation nécessite juste que le système soit observable ; elle ne requiert pas de transformation sous une forme particulière, impossible analytiquement pour certains systèmes. De plus, les propriétés de robustesse des modes glissants permettent d'observer un système dont le modèle est mal connu.

Alors que la première section rappelle quelques notions sur l'observabilité, la seconde pose le problème de l'observation d'un système incertain, et du sens que peut avoir l'estimation de l'état pour un tel système. La stratégie d'observation proprement dite est présentée dans la 4<sup>e</sup> partie, sa convergence dans le cas idéal prouvée dans la 5<sup>e</sup>, et son erreur asymptotique en présence de *chattering* étudiée dans la 6<sup>e</sup>. Enfin, sa faisabilité est démontrée sur un exemple académique.

## A.1 Rappels sur l'observabilité

Considérons un système non linéaire de la forme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{A.1}$$

L'observabilité des systèmes non linéaires est définie à partir de la notion d'indiscernabilité. il existe une synthèse de ces notions dans

**Définition A.1** (Indiscernabilité). [HK77] Deux états initiaux  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_2$  sont dit indiscernables pour le système (A.1) si  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , les sorties correspondantes  $\mathbf{y}_1(t)$  et  $\mathbf{y}_2(t)$  sont identiques, quelle que soit l'entrée admissible  $\mathbf{u}(t)$  du système.

**Définition A.2** (Observabilité). Le système (A.1) est dit observable s'il n'admet pas de paire indiscernable.

Un système est donc observable si la connaissance précise de la sortie pendant un temps suffisamment long permet de déduire exactement l'état initial du système.

**Définition A.3** (Espace d'observabilité). [HK77] L'espace d'observabilité est le plus petit sous espace vectoriel de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans l'espace de sortie, contenant les sorties  $h_1, \dots, h_p$  et qui soit fermé sous l'opération de dérivation de Lie par rapport au champ de vecteur  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u}$  étant fixé.

On note  $d\mathcal{O}$  l'espace des différentielles de  $\mathcal{O}$ .

**Définition A.4.** L'espace  $d\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$  (évalué en  $\mathbf{x}_0$ ) caractérise l'observabilité faible locale en  $\mathbf{x}_0$  du système (A.1). Ce dernier est dit satisfaisant la condition de rang d'observabilité en  $\mathbf{x}_0$  si

$$\dim(\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)) = n$$

S'il la satisfait  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , on dit qu'il satisfait la condition de rang d'observabilité.

En posant

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \text{Span}_{\mathcal{K}}\{d\mathbf{x}\} \\ \mathcal{U} &= \text{Span}_{\mathcal{K}}\{d\mathbf{u}^{(v)}\} \quad , \quad v \geq 0 \\ \mathcal{Y} &= \text{Span}_{\mathcal{K}}\{d\mathbf{y}^{(w)}\} \quad , \quad w \geq 0\end{aligned}$$

où  $\mathcal{K}$  est l'ensemble des fonctions méromorphes [CMP99], et  $Span_{\mathcal{K}}\{\mathbf{x}\}$  est le sous espace vectoriel de  $\mathcal{K}$  engendré par la famille de vecteurs  $\mathbf{x}$ .

L'espace d'observabilité générique noté  $\mathcal{O}$  est défini par  $\mathcal{O} = \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} + \mathcal{U})$ .

**Définition A.5.** [CMP99] Le système (A.1) est génériquement observable si et seulement si

$$\dim \mathcal{O} = n$$

Cette condition est appelée condition de rang d'observabilité générique. Si elle est satisfaite,

$$rang_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} dh \\ dL_{\mathbf{f}}h \\ \vdots \\ dL_{\mathbf{f}}^{n-1}h \end{pmatrix} = rang_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} dy \\ \dot{y} \\ \vdots \\ dy^{(n-1)} \end{pmatrix} = n$$

Cela implique que l'état peut être reconstruit à partir de la connaissance de la sortie et d'un nombre fini de ses dérivées. Un critère génériquement équivalent est que le jacobien

$$\frac{\partial(y, \dots, y^{(n-1)})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

est de rang plein. L'observabilité d'un système non linéaire peut donc être caractérisée par :

**Définition A.6.** Le système (A.1) est génériquement observable si

- Il existe  $p$  entiers  $l_i > 0$  tels que  $\sum_{i=1}^p l_i = n$ ,
- La transformation  $\Phi = [y_1 \ \dot{y}_1 \ \dots \ \dot{y}_1^{(l_1-1)} \ \dots \ y_p \ \dots \ \dot{y}_p^{(l_p-1)}]^T$  est une transformation d'état pour  $x \in \mathcal{X}$  et  $u \in \mathcal{U}$ .

Les entiers  $l_i$  sont appelés indices d'observabilité.

## A.2 Observation d'un système incertain

Considérons maintenant le système non linéaire monovariable *incertain*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta_{\mathbf{x}} \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{A.2}$$

avec  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  l'état et  $y \in \mathbb{R}$  la sortie mesurée.  $\mathbf{f}$  est le système nominal et  $\Delta_{\mathbf{x}}$  un terme inconnu mais suffisamment différentiable. La sortie  $y$  est considérée comme étant parfaitement mesurée, mais le modèle dynamique (A.2) est mal connu, car sujet à la perturbation  $\Delta_{\mathbf{x}}$ . Ce dernier terme représente donc à la fois les incertitudes du modèle et d'éventuelles entrées inconnues. Définissons le système nominal de (A.2) comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_N &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_N) \\ y_N &= h(\mathbf{x}_N) \end{aligned} \tag{A.3}$$

où  $\mathbf{x}_N$  est le vecteur d'état et  $y_N$  la sortie.

On suppose que :

**Hypothèse A.1.** Le système nominal (A.3) est génériquement observable.



### A.2.1 Multiplicité des états possibles

Avant de donner la structure de l'observateur, il faut définir vers quoi il va converger de manière univoque. En effet, la structure du système (A.2) est mal connue, car celle des perturbations est inconnue. Le terme inconnu  $\Delta_x$  peut avoir l'air de modifier la dynamique du système. Donc, dans le cas général, si l'on ne mesure que la sortie, il existe une infinité d'états possibles correspondant à un même signal de sortie  $y(t)$ . Cela est résumé par le théorème suivant :

**Theorème A.1.** *Il existe une infinité de systèmes de la forme Eq. (A.2), ayant le même système nominal et répondant à l'hypothèse A.1, qui ont la même sortie  $y(t)$ .*

*Démonstration.* On peut en effet réécrire le système Eq. (A.2) sous la forme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{2\dots n} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} + \tilde{\Delta}_x \\ y &= \tilde{\mathbf{x}}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Beaucoup de systèmes réels se présentent naturellement sous cette forme. Si tel n'est pas le cas, on peut par exemple utiliser la forme canonique d'observabilité puisque le système nominal est observable.

Définissons maintenant  $\tilde{\mathbf{x}}_a \in \mathbb{R}^{n-1}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_b \in \mathbb{R}^{n-1}$  tels que  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_a(t) + \tilde{\mathbf{x}}_b(t) \end{bmatrix}$  soient solutions de l'Eq. (A.4) :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_a &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a), \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a + \tilde{\mathbf{x}}_b) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a) \\ \text{et } \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 &= \tilde{\mathbf{f}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a) + \tilde{\Delta}_b \\ \text{avec } \tilde{\Delta}_b &= \tilde{\mathbf{f}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a + \tilde{\mathbf{x}}_b) - \tilde{\mathbf{f}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a) + \tilde{\Delta}_x \end{aligned}$$

Le système A.4 peut alors être réécrit

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a) \\ \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Les systèmes (A.4) et (A.5) sont donc équivalents, puisque la structure des perturbations est inconnue *a priori*. Vu qu'il y a une infinité de décompositions de  $\tilde{\mathbf{x}}$  en  $\tilde{\mathbf{x}}_a$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_b$ , il y a une infinité de systèmes distincts mais équivalents de la forme A.4. Tous ces systèmes sont indiscernables l'un de l'autre si seule la sortie  $y(t)$  est connue.  $\square$

Il faut donc trouver un état correspondant à un modèle de référence qui ait une signification physique claire pour que le problème d'observation ait un sens.

### A.2.2 Forme canonique d'observabilité et état de référence

L'hypothèse A.1 permet d'écrire le système nominal (A.3) sous la forme canonique d'observabilité. Soit la transformation d'état  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{z}_N = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}_N) \\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_N)} h(\mathbf{x}_N) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_N)}^{(n-2)} h(\mathbf{x}_N) \\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_N)}^{(n-1)} h(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_N) \quad (\text{A.6})$$

La dynamique du système nominal s'écrit

$$\dot{\mathbf{z}}_N = J(\mathbf{z}_N) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z}_N)) \quad (\text{A.7})$$

avec  $J(\cdot)$ , la matrice jacobienne de  $\mathbf{G}$  définie comme

$$J(\mathbf{z}_N) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}_N}(\mathbf{x}_N) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z}_N)}(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z}_N)) \quad (\text{A.8})$$

est une matrice de rang plein grâce à l'Hypothèse A.1.

Intéressons nous maintenant au système (A.2). La seule information disponible de ce système est la sortie  $y$  dont on peut calculer les dérivées successives

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

En utilisant la connaissance du système nominal, posons  $\mathbf{x}^* = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z})$ . Dans le cas où il n'y a ni incertitude, ni perturbation, on a  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_N$ .

La forme canonique d'observabilité du système (A.2) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(\mathbf{z}) \end{bmatrix} + \Delta_{\mathbf{z}} \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{z} = \mathbf{z}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$\psi_N(\mathbf{z}) = L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}^{(n)} h(\mathbf{x}^*)$  et

$\Delta_{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{x}^*) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$ , le terme d'incertitudes regroupant l'ensemble des erreurs du modèle et des perturbations externes.

Par définition de  $\mathbf{z}$  et de la matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\Delta_{\mathbf{z}}$  est de la forme  $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$ . Cela signifie que la perturbation  $\Delta_{\mathbf{x}^*}$  dans le système

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \Delta_{\mathbf{x}^*} \\ y &= h(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

est co-incidente (*matched*). Un régulateur par modes glissants peut donc compenser exactement  $\Delta_{\mathbf{x}^*}$ .

Nous pouvons donc poser :

**Définition A.7.** Appelons  $\mathbf{x}^* = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z})$  l'état du système de la forme Eq. (A.2).

Cet état permet d'approximer la sortie et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$ , donc son développement limité à l'ordre  $n - 1$ , en utilisant le modèle nominal.  $\mathbf{x}^*$  est donc l'état qui permet de prédire au mieux la sortie à court terme si on ne connaît que le modèle nominal (A.3) du système (pas les incertitudes et perturbations). Cet état de référence correspond à l'état du système nominal dans le cas où la perturbation est nulle, évidemment, mais aussi dans le cas où elle est co-incidente. Cette estimation de l'état est utilisable par une loi de commande par retour d'état se basant sur le modèle nominal, puisqu'elle donne la meilleure estimation de l'évolution future de la sortie à court terme. Par contre, l'état estimé ne correspond pas forcément à l'état physique du système : si une composante de la perturbation a une dynamique proche de celle du système, l'observateur la prendra en compte dans l'état. Cet état estimé n'est donc pas utilisable pour du diagnostic, par exemple, en présence d'incertitudes ou de perturbations non co-incidentes. C'est vers cet état de référence que va converger l'observateur présenté.

### A.3 Structure de l'observateur

L'observateur présenté se compose de

- un dérivateur à convergence en temps fini [Lev03] permettant de calculer les dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$  de l'erreur d'estimation de la sortie,
- un terme de correction scalaire  $w$  calculé suivant un algorithme par modes glissants [PGL08] en fonction uniquement de l'erreur d'estimation de la sortie et de ses dérivées,
- une recopie du modèle du système nominal, vu comme un système commandé par  $w$  dont la sortie  $\hat{y}$  doit suivre la trajectoire de référence  $y$ .

Ainsi, l'observateur se présente sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{z}}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(\hat{\mathbf{z}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ \hat{y} &= \hat{z}_1 \end{aligned} \tag{A.11}$$

avec  $\hat{\mathbf{z}} = [\hat{z}_1 \ \hat{z}_2 \ \cdots \ \hat{z}_n]^T$ . Comme l'objectif final est l'estimation de l'état  $\mathbf{x}^*$ , l'observateur précédent doit être écrit dans l'espace original

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{J}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ \hat{y} &= h(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \tag{A.12}$$

avec l'estimation de la matrice jacobienne  $\hat{J} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}$ .

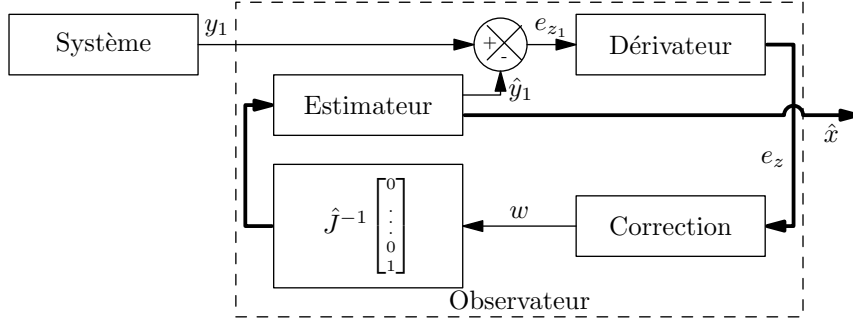


FIG. A.1 – Observateur type “Dérivées de la différence”.

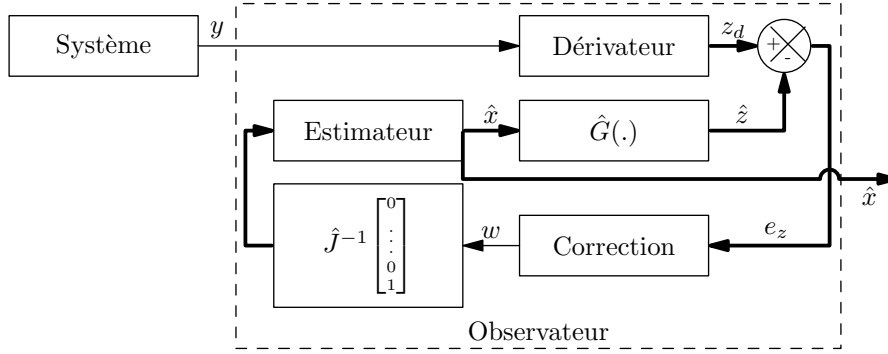


FIG. A.2 – Observateur type “Différence des dérivées”.

### A.3.1 Dérivateur multiple

Le dérivateur mutiple doit fournir au correcteur une estimation de l'erreur d'estimation de la sortie et de ses dérivées  $e_z = z - \hat{z}$ . Pour ce faire, il y a 2 méthodes possibles

- **Dérivées de la différence** (Figure A.1). la sortie réelle  $y$  est comparée avec celle de l'estimateur  $\hat{y}$ , la différence étant dérivée  $n - 1$  fois,
- **Différence des dérivées** (Figure A.2). la sortie du système réelle est dérivée  $n - 1$  fois, ce qui donne  $z$  qui est comparé à  $\hat{z}$ .

La dérivation successive des grandeurs dans les deux structures précédentes est ici réalisée par un dérivateur de Levant (cf §3.3.2).

### A.3.2 Terme de correction $w$

Le terme de correction  $w$  se base sur un régulateur par modes glissants [PGL08] assurant la convergence de l'erreur d'estimation  $e_z = [e_{z_1} \ e_{z_2} \ \cdots \ e_{z_n}]^T$  à 0 en un temps fini  $t_F$  connu *a priori*, grâce à des trajectoires précalculées. Soient la *variable de commutation*  $\sigma$  et la *surface de glissement*  $\mathcal{S}$  définies par

$$\begin{aligned} \sigma &= [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_n]^T = e_z - e_{z,ref}(t) \\ \mathcal{S} &= \{x \in \mathcal{X} | \sigma = 0\} \end{aligned} \quad (A.13)$$

avec les trajectoires précalculées

$$e_{z,ref}(t) = [e_{z_1,ref}(t) \ e_{z_2,ref}(t) \ \cdots \ e_{z_n,ref}(t)]^T$$

définies par

$$\begin{aligned} \sigma(t=0) = 0 &\Rightarrow e_{z,ref}(0) = e_z(0) \\ \sigma(t \geq t_F) = 0 &\Rightarrow e_{z,ref}(t \geq t_F) = 0 \end{aligned} \quad (A.14)$$

Le terme de correction  $w$  a l'expression

$$w = \alpha \operatorname{sign}(\sigma_n + \lambda_{n-1}\sigma_{n-1} + \cdots + \lambda_1\sigma_1) \quad (\text{A.15})$$

avec les coefficients  $\lambda_i$  choisis tels que  $P(s) = s^{(n-1)} + \lambda_{n-1}s^{(n-2)} + \cdots + \lambda_1$  ( $s$  est une variable complexe) soit Hurwitz. Le gain  $\alpha$  doit être suffisamment grand pour que le système (A.11) reste sur  $\mathcal{S}$  en dépit des incertitudes et perturbations. Étant donnée la définition de  $e_{\mathbf{z},ref}(t)$ ,  $e_{\mathbf{z}}(t \geq t_F) = 0$ .

## A.4 Convergence dans le cas d'un mode glissant idéal

Les preuves de la convergence de l'observateur reposent sur la *méthode de la commande équivalente* proposée dans [Utk92, UGJ99]. Cette méthode consiste à poser la commande équivalente  $w_{eq}$  comme la valeur moyenne du signal  $w$ , et à s'assurer qu'elle permette de compenser les incertitudes co-incidentes à tout instant. Dans cette section, on suppose également que

- la fréquence d'échantillonnage est infinie, ce qui implique que la commutation de  $w$  a lieu instantanément, sans retard,
- l'erreur de mesure de la sortie est nulle ( $y$  est parfaitement connu).

**Définition A.8.** L'observateur Eq. (A.11) a convergé au temps  $t_F$  si  $e_{\mathbf{z}}(t) = 0 \ \forall t \geq t_F$ .

*Remarque A.1.* Dans ce cas,  $e_{\mathbf{x}} = 0$ , car  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z}$ ,  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^*)$  et  $\mathbf{G}(\cdot)$  est inversible.

La dynamique de l'erreur  $\sigma = e_{\mathbf{z}} - e_{\mathbf{z},ref}$  s'écrit

$$\dot{\sigma} = \mathbf{A}\sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(\mathbf{z}) - \psi_N(\hat{\mathbf{z}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{e}_{\mathbf{z},ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Grâce au choix de la trajectoire, on a  $\sigma(t=0) = 0$  : la commande équivalente  $w_{eq}$  doit juste compenser  $\psi_N(\mathbf{z}) - \psi_N(\hat{\mathbf{z}})$ ,  $\Delta_{\mathbf{z}}$  et  $\dot{e}_{\mathbf{z},ref}$  pour maintenir l'erreur sur la trajectoire de référence :

$$w_{eq} = -(\psi_N(\mathbf{z}) - \psi_N(\hat{\mathbf{z}}) + \Delta_{\mathbf{z}} - \dot{e}_{\mathbf{z},ref}) \quad (\text{A.17})$$

**Hypothèse A.2.** Les fonctions  $\psi_N$ ,  $\Delta_{\mathbf{z}}$  et  $\dot{e}_{\mathbf{z},ref}$  sont telles que

$$|\psi_N| \leq C_N, \quad |\Delta_{\mathbf{z}}| \leq C_U, \quad |\dot{e}_{\mathbf{z},ref}| \leq \theta.$$

**Theorème A.2.** *Considérons le système (A.9) avec l'Hyp. A.2 satisfaite. Le système (A.11)-(A.15)-(3.1) est un observateur à convergence en temps fini  $t_F$ , de (A.9) si*

$$\alpha > 2C_N + C_U + \theta \quad (\text{A.18})$$

et si la constante de Lipschitz du dérivateur multiple (3.1) est telle que

- $L > 2C_N + C_U + \alpha$  pour l'observateur type “dérivées de la différence”,
- $L > C_N + C_U$  pour l'observateur type “différence des dérivées”.

*Démonstration.* L'amplitude de  $w$  doit être suffisante pour que  $w_{eq}$  puisse compenser  $\psi_N(\mathbf{z}) - \psi_N(\hat{\mathbf{z}}) + \Delta_{\mathbf{z}} - \dot{e}_{z_n,ref}$  à tout instant. Un majorant de la valeur absolue de cette expression est  $2C_N + C_U + \theta$  d'après l'Hyp. A.2.

Pour la configuration "dérivées de la différence", le signal à dériver est  $e_{z_1}$ . Sa dérivée d'ordre le plus élevé est  $e_{z_n}$ , dont la constante de Lipschitz est un majorant de  $|\dot{e}_{z_n}|$ , qui est  $2C_N + C_U + \alpha$ . Pour la configuration "différence des dérivées", le signal à dériver est  $y = z_1$ . Sa dérivée d'ordre le plus élevé est  $z_n$ , dont la constante de Lipschitz est  $C_N + C_U$ . Si la constante de Lipschitz du dérivateur multiple est choisie suffisamment grande en accord avec les valeurs précédentes, le dérivateur converge en temps fini d'après [Lev03]. À ce moment là, le correcteur par modes glissants maintient l'erreur  $e_{\mathbf{z}}$  sur la trajectoire de référence  $e_{\mathbf{z},ref}(t)$  à condition qu' $\alpha$  respecte la condition ci dessus. La trajectoire précalculée emmène finalement  $e_{\mathbf{z}}$  en l'origine en temps fini. L'observateur (A.11)-(A.15)-(3.1) a alors convergé vers le système (A.9).  $\square$

Comme  $\psi_N(\mathbf{z}) - \psi_N(\hat{\mathbf{z}}) = \dot{e}_{z_n,ref} = 0$  une fois que l'observateur a convergé (donc pour  $t \geq t_F$ ), il est possible de réduire l'amplitude du différentiateur et du correcteur, ce qui réduit le *chattering*.

**Theorème A.3.** *Considérons le système non linéaire incertain (A.9) avec l'Hypothèse A.2 satisfaite. Le système (A.11)-(A.15)-(3.1) est un observateur à convergence en temps fini  $t_F$ , de (A.9) si*

$$\begin{aligned} \alpha &> 2C_N + C_U + \theta \quad \text{pour } 0 \leq t < t_F, \\ \alpha &> C_U \quad \text{pour } t \geq t_F, \end{aligned} \tag{A.19}$$

et si la constante de Lipschitz du dérivateur multiple Eq. (3.1) est telle que

- Observateur type "Dérivées de la différence"
  - $L > 2C_N + C_U + \alpha$  pour  $0 \leq t < t_F$ ,
  - $L > C_U + \alpha$  pour  $t \geq t_F$ ,
- Observateur type "Différence des dérivées"
  - $L > C_N + C_U$  pour  $0 \leq t < t_F$ ,
  - $L > C_N + C_U$  pour  $t \geq t_F$ .

La preuve de ce théorème est basée sur la même démarche que celle du théorème précédent. Seuls les majorants de  $|\dot{\sigma}_n|$  et de  $|\dot{e}_{z_n}|$  ont changé.

## A.5 Mode glissant réel et erreur résiduelle

Dans cette section, on suppose que la mesure est connue de façon incertaine, à cause d'une imprécision du capteur, ou de l'instant exact de la mesure (dû à une période d'échantillonnage échantillonnage finie par exemple). Autrement dit, il existe un réel  $\epsilon$  tel que

$$y \in y_{reel} + [-\epsilon, \epsilon]$$

avec  $y_{reel}$  la valeur réelle de la mesure et  $y$  la valeur mesurée.

**Theorème A.4.** *Il existe des constantes  $a_i$  et  $b_i$  avec  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq i \leq n$  telles que l'erreur d'estimation de chaque variable d'état du système (A.9) vérifie  $|e_{z_i}| < a_i \sqrt[n]{\epsilon}$ , et telles que l'erreur d'estimation de chaque variable d'état du système vérifie (A.2)  $|e_{\mathbf{x}_i}| < b_i \sqrt[n]{\epsilon}$*

*Démonstration.* Soit  $e_d = e_{\mathbf{z}} - e_{\mathbf{z}_d}$  l'erreur engendrée par le dérivateur. À noter qu'elle est équivalente quelque soit le type de l'observateur (voir Figures Eq. (A.1)-Eq. (A.2)). D'après [Lev03], il existe  $n$  constantes  $d_i$  ( $i \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ) telles que  $|e_{d_i}| \leq d_i \epsilon^{\frac{n+1-i}{n}}$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit.

En tenant compte de l'erreur de dérivation, le terme de correction s'écrit

$$w = \alpha \operatorname{sign}(\sigma_n + \lambda_{n-1}\sigma_{n-1} + \cdots + \lambda_1\sigma_1 + \lambda e_d)$$

où  $\lambda e_d = e_{d_n} + \lambda_{n-1}e_{d_{n-1}} + \cdots + \lambda_1 e_{d_1}$ . Etant donné que  $\lambda_i e_{d_i} = \mathcal{O}\left(\epsilon^{\frac{n+1-i}{n}}\right)$ , on a pour  $\epsilon$  suffisamment petit

$$\|\lambda e_d\| \leq C \sqrt[n]{\epsilon} \Rightarrow \lambda e_d = \mathcal{O}(\sqrt[n]{\epsilon}).$$

$w$  ayant toujours la “bonne” valeur en dehors de la bande de largeur  $2C \sqrt[n]{\epsilon}$  centrée sur l'hyperplan défini par le correcteur, l'erreur de différentiation n'a donc aucun effet à l'extérieur de cette bande. En revanche, À l'intérieur, l'erreur de différentiation peut induire une “mauvaise” correction ( $+\alpha$  au lieu de  $-\alpha$  ou inversement). La précision à l'intérieur de la bande n'est donc pas garantie. De plus, le régulateur présente une précision en  $\mathcal{O}(\sqrt[n]{\epsilon})$  en l'absence d'erreur de dérivation. La précision globale du correcteur réel est donc en  $\mathcal{O}(\sqrt[n]{\epsilon})$ , autrement dit, il existe  $n$  constantes  $a_i$  telles que  $|e_{z_i}| < a_i \sqrt[n]{\epsilon}$ . Comme  $\mathbf{x}^* = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z})$  et  $\mathbf{x}^* + e_{\mathbf{x}} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z} + e_{\mathbf{z}})$ ,

$$e_{\mathbf{x}} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z} + e_{\mathbf{z}}) - \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{z}) \Rightarrow \|e_{\mathbf{x}}\| = L_{\mathbf{G}^{-1}} \|e_{\mathbf{z}}\|$$

avec  $L_{\mathbf{G}^{-1}}$  la constante de Lipschitz de  $\mathbf{G}^{-1}$ . Comme la norme 2 et la norme  $\infty$  sont équivalentes, il existe  $n$  constantes  $b_i$  telles que  $|e_{z_i}| < b_i \sqrt[n]{\epsilon}$ .  $\square$

## A.6 Exemple académique

Prenons un exemple inspiré d'un moteur à courant continu série dont la saturation magnétique est négligée [Chi94, Ple95]. Il est régi par le système d'équations

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 x_2 - k_2 x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -k_3 x_2 - x_3 + k_4 x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= 0 + \Delta_x\end{aligned}$$

où  $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  est l'état du système, et  $u = 100$ . Les paramètres sont fixés à  $k_1 = 0.043, k_2 = 0.227, k_3 = 0.033, k_4 = 0.13$ , l'état initial du système à  $x_1(0) = 10, x_2(0) = 40$  et  $x_3(0) = 100$  et son état estimé à  $\hat{x}_1(0) = x_1(0) = 10, \hat{x}_2(0) = 50$  et  $\hat{x}_3(0) = 120$ . La sortie mesurée est  $y = x_1$ , le système est observable pour  $x_1 \neq 0$ , ce qui est le cas dans cet exemple. À  $t = 5s$ , une perturbation co-incidente (*matched*) d'amplitude  $\Delta_x = 1000$  pendant  $0.1s$  fait passer  $x_3$  de 100 à 200. Pour les conditions considérées dans cet exemple, on peut prendre  $C_N = 1200$  et  $C_U = 300$  comme majorants.

La trajectoire de référence est calculée suivant [PGL08] pour  $t_F = 2s$  et a pour majorant  $\theta = 300$ . On choisit une configuration “Différence des dérivées” avec  $L = 1200$ , et  $\alpha = 3000$  pour la phase de convergence ( $t \leq t_F$ ), puis  $\alpha = 300$  pour  $t > t_F$ . Le terme de correction est donc

$$w = -\alpha \operatorname{sign} \left[ (e_{z,3} - \ddot{e}_{z_{1,ref}}(t)) + \lambda_2 (e_{z,2} - \dot{e}_{z_{1,ref}}(t)) + \lambda_1 (e_{z,1} - e_{z_{1,ref}}(t)) \right]$$

avec  $\lambda_1 = 400, \lambda_2 = 120$ . Comme on le voit sur la figure A.3, les états estimés convergent vers les états réels en  $t_F = 2s$  en dépit des perturbations sur  $x_3$ .

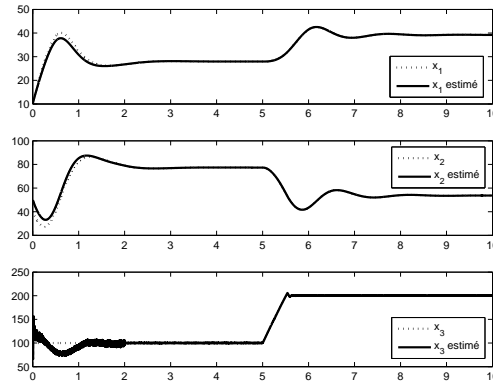


FIG. A.3 – **Haut-**  $x_1$  (pointillés) et  $\hat{x}_1$  en fonction du temps (s). **Milieu-**  $x_2$  (pointillés) et  $\hat{x}_2$  en fonction du temps (s). **Bas-**  $x_3$  (pointillés) et  $\hat{x}_3$  en fonction du temps (s).

## A.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté un observateur à convergence en temps fini connu *a priori* pour une large classe de systèmes non linéaires incertains, car ne nécessitant aucune transformation d'état. L'observateur est constitué d'un modèle nominal du système, dont la convergence vers l'état réel est assurée par une commande par modes glissants calculée à partir de la sortie et d'une estimation de ses dérivées, obtenues par un dérivateur de Levant. Cette convergence en temps fini dans le cas idéal est formellement établie, et l'erreur résiduelle est quantifiée dans le cas réel (fréquence d'échantillonnage finie, ...). Un exemple académique démontre la faisabilité de la mise en œuvre de ce type d'observateur, ainsi que ses performances de convergence en temps fini et sa robustesse. Malheureusement, les performances de cet observateur ne sont pas meilleurs que celles d'un dérivateur de Levant utilisé au travers de la matrice jacobienne, alors que ce dernier est beaucoup plus simple à régler, et nécessite moins de calculs en ligne.





# Bibliographie

- [ADC94] B. Armstrong, P. Dupont, and C. Canudas de Wit. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30(7) :1083–1138, 1994.
- [AF66] M. Athans and P. L. Falb. *Optimal Control. An introduction to the theory and its applications*. McGraw Hill. Lincoln library publications, 1966.
- [Ano59] D.V. Anosov. On stability of equilibrium points of relay systems. *Automatica i telemekhanika*, 2 :135–149, 1959.
- [AS61] M. Athans and J. M. Smith. Theory and design of high order bang bang control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 125–131, 1961.
- [Ath62] M. Athans. Bang bang control for tracking systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 77–78, 1962.
- [BAG99] G. Bartolini, A. Ferrara, and L. Giacomini. A robust control design for a class of uncertain nonlinear systems featuring a second order sliding mode. *Int. J. Control*, 72(4) :321–331, 1999.
- [Bal94] S. Balkan. Time optimal control of a third ordre regulator. Master’s thesis, Naval postgraduate school, Monterey, 1994.
- [BB98] T. Boukhobza and J.-P. Barbot. High order sliding modes observer. In *IEEE Conf. on Decision and Control CDC*, Tampa, Florida, USA, 1998.
- [BBKU85] A.G. Bondarev, S.A. Bondarev, N.E. Kostyleva, and V.I. Utkin. Sliding mode in systems with asymptotic state observers. *Automation and Remote Control*, 6 :49–64, 1985.
- [BFP07] F.J. Bejarano, L. Fridman, and A. Poznyak. Output integral sliding mode control based on algebraic hierarchical observer. *International Journal of Control*, 80(3) :443–453, 2007.
- [BG97] V. Boltyanski and S. Gorelikova. Optimal synthesis for non oscillatory controlled objects. *Journal of Applied Analysis*, 3(1) :1–21, 1997.
- [Bol69] V. G. Boltjanski. *Mathematische Methoden der optimalen Steuerung*. Carl Hanser, 2. edition, 1969.
- [BP09a] V. Brégeault and F. Plestan. High order sliding mode control based on a time optimal control scheme. In *ROCOND’09*, juin 2009.
- [BP09b] V. Brégeault and F. Plestan. Une stratégie d’observation par modes glissants. In *JD-JN MACS 2009*, March 2009.
- [BPF09] V. Brégeault, F. Plestan, and L. Fridman. A new structure for a nonlinear observer : a sliding mode based solution. In *ECC’09*, August 2009.

- [BPre] V. Brégeault and F. Plestan. Un observateur non linéaire par modes glissants à convergence en temps fini. *Journal européen des systèmes automatisés*, À paraître.
- [BPSP10] V. Brégeault, F. Plestan, Y. Shtessel, and A. Poznyak. Adaptive sliding mode control for an electropneumatic actuator. In *VSS'10*, June 2010.
- [BR01] A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov functions and stability in control theory*. Lecture notes in control and information sciences. Springer, 2001.
- [BZ86] J.A. Burton and Alan S.I. Zinober. Continuous approximation of variable structure control. *Int. J. Systems Science*, 17(6) :875–885, 1986.
- [CC07] M. Chen and C. Chen. Robust nonlinear observer for lipschitz nonlinear systems subject to disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(12) :2365–2369, 2007.
- [CF06] F. Castaños and L. Fridman. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5) :853–858, 2006.
- [Chi94] J. Chiasson. Nonlinear differential-geometric techniques for control of a series dc motor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2(1) :35–42, 1994.
- [CMP99] G. Conte, C.H. Moog, and A.M. Perdon. *Nonlinear Control Systems - An Algebraic Setting*. Springer, London, 1999.
- [DLL05] J. Davila, L.Fridman, and A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11) :1785–1789, 2005.
- [Dra69] B. Drazenovic. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 5(3) :287–295, 1969.
- [Eat62] J. H. Eaton. An iterative solution to time-optimal control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1962.
- [EKL96] S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, and A. Levant. Higher-order sliding modes in control systems. *Computational mathematics and modelling*, 29(3) :294–318, 1996.
- [ES98] C. Edwards and S.K. Spurgeon. *Sliding mode control : theory and applications*. Taylor & Francis, London, 1998.
- [FB07] T. Floquet and J.P. Barbot. Super twisting algorithm based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *Special Issue of IJSS on Advances in Sliding Mode Observation and Estimation*, 38(10) :803–815, 2007.
- [Fil88] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer, 1988.
- [FLD07] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10) :773–791, 2007.
- [FSEXG08] L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards, and Y. Xing-Gang. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18 :399–412, 2008.

- [FYM02] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man. Non singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38 :2159–2167, 2002.
- [HK77] R. Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :724–740, 1977.
- [HKC08] Y.-J. Huang, T.-C. Kuo, and S.-H. Chang. Adaptive sliding mode control for nonlinear systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. Syst., Man and cybernetics*, 38(3) :534–539, 2008.
- [Isi95] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 1995.
- [Kar85] D. Karnopp. Computer simulation of a stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 107 :100–103, 1985.
- [Kir70] D. E. Kirk. *Optimal Control Theory, an introduction*. Prentice-hall, 1970.
- [Lag04] S. Laghrouche. *Commande par modes glissants d'ordre supérieur : théorie et applications*. PhD thesis, Ecole centrale de nantes, 2004.
- [LAP07] V. Lebastard, Y. Aoustin, and F. Plestan. Observer-based control of a walking biped robot : stability analysis. In *IEEE Conference on Decision and Control CDC*, New-Orleans, Louisiana, USA, 2007.
- [LAPF08] V. Lebastard, Y. Aoustin, F. Plestan, and L. Fridman. An alternative to the measurement of five-links biped robot absolute orientation : estimation based on high order sliding mode. In G. Bartolini, L. Fridman, A. Pisano, and E. E. Usai, editors, *Modern Sliding Mode Control Theory : New Perspectives and Applications. Volume 375 of Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 363–380, Springer, Berlin, 2008.
- [Lev93] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 6(58) :1247–1263, 1993.
- [Lev98] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3) :379–384, 1998.
- [Lev01] A. Levant. Universal siso sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9) :1447–1451, 2001.
- [Lev03] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76 :924–941, 2003.
- [Lev05] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5) :823–830, 2005.
- [LF02] A. Levant and L. Fridman. *Sliding mode Control in Engineering*, chapter High order sliding modes, pages 53–101. Marcel Dekker, 2002.
- [LP08] A. Levant and Y. Pavlov. Generalized homogeneous quasi-continuous controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4-5(18) :385–398, 2008.
- [LSPB06] S. Laghrouche, M. Smaoui, F. Plestan, and X. Brun. Higher order sliding mode control based on optimal approach of an electropneumatic actuator. *International Journal of Control*, 79(2) :119–131, 2006.
- [LU07] H. Lee and V.I. Utkin. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control*, 31 :179–188, 2007.

- [MO08] J. Moreno and M. Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *47th CDC*, December 2008.
- [MS00] D. Munoz and D. Sbarbaro. An adaptive sliding mode controller for discrete nonlinear systems. *IEE Trans. Industrial electronics*, 47(3) :574–581, 2000.
- [PC05] B.G Penev and N.D. Christov. A fast time optimal control synthesis algorithm for a class of linear systems. 2005 American control conference, 2005.
- [PF93] L. Y. Pao and G. F. Franklin. Proximate time-optimal control of third-order servomechanisms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(4) :560–579, April 1993.
- [PGL08] F. Plestan, A. Glumineau, and S. Laghrouche. A new algorithm for high-order sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18 :441–453, 2008.
- [Ple95] F. Plestan. *Linéarisation par injection d’entrée-sortie généralisée et synthèse d’observateur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, France, Oct. 1995.
- [PSBP10] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International journal of control*, 83(9) :1907–1919, sep 2010.
- [PSBPpre] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Brégeault, and A. Poznyak. Adaptive sliding mode control for a class of mimo nonlinear systems - application to an electropneumatic actuator. *Automatica*, soumis en 3e lecture.
- [TCL03] C.W. Tao, M.L. Chan, and T.T. Lee. Adaptive fuzzy sliding mode controller for linear systems with mismatched time varying uncertainties. *IEEE Trans. Syst., Man and cybernetics*, 33(2) :283–294, 2003.
- [Tsy84] Y.Z. Tsypkin. *Relay control systems*. Cambrige University Press, 1984.
- [UGJ99] V. Utkin, J. Guldner, and S. Jingxin. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Systems and Control. Taylor & Francis, London, 1999.
- [Utk92] V. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer, Berlin, 1992.
- [WGT01] U. Walther, T. T. Georgiou, and A. Tannenbaum. On the computation of switching surfaces in optimal control : A gröbner basis approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4) :534–540, 2001.
- [XS01] Y Xiong and M Saif. Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12) :2012–2017, Dec. 2001.
- [YM94] X. Yu and Z. Man. Model reference adaptive control system with terminal sliding mode. *International Journal of Control*, 64(6) :1165–1176, 1994.
- [YVÖ99] K.D. Young, V.I. Utkin, and Ö. Özgüner. A control engineer’s guide to sliding mode control. *IEEE Trans. Control Systems tychnology*, 7(3) :328–342, 1999.